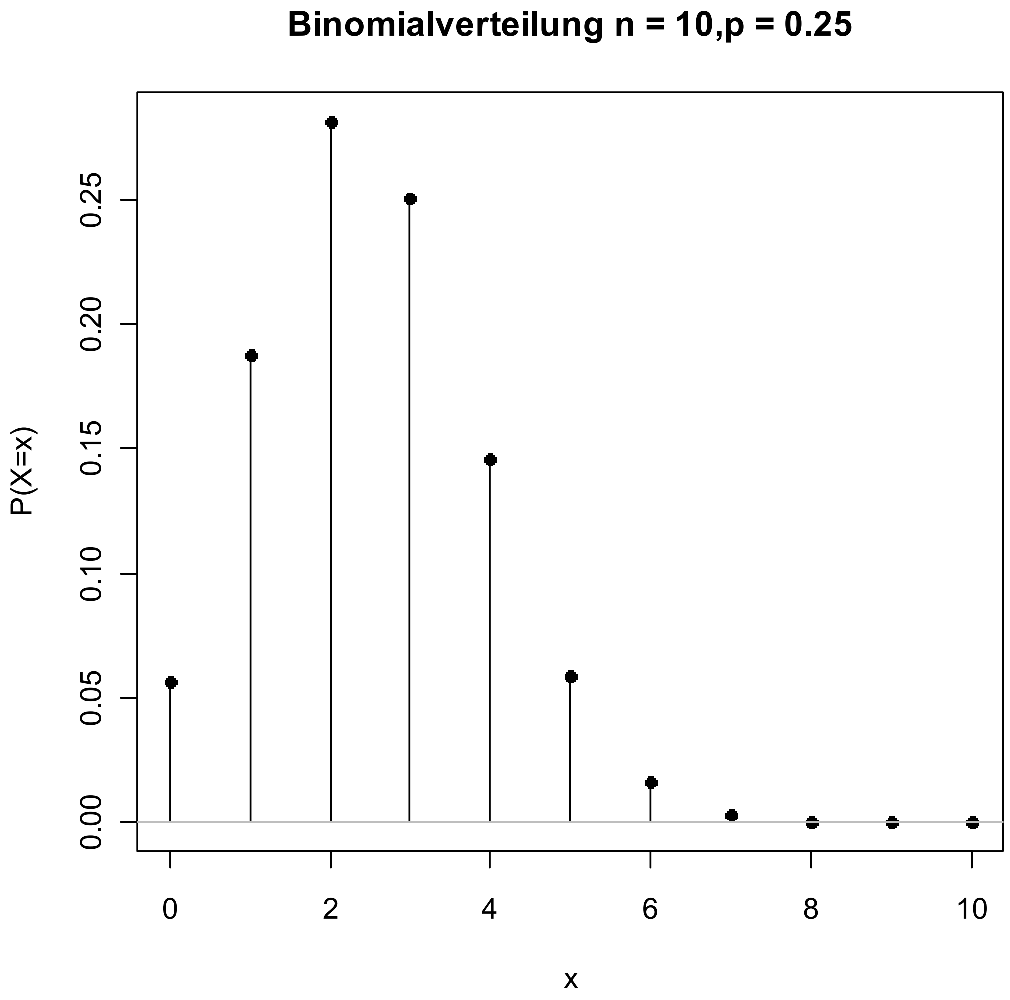
BELTZ

Lösungen zu den Übungsaufgaben in Kapitel 7

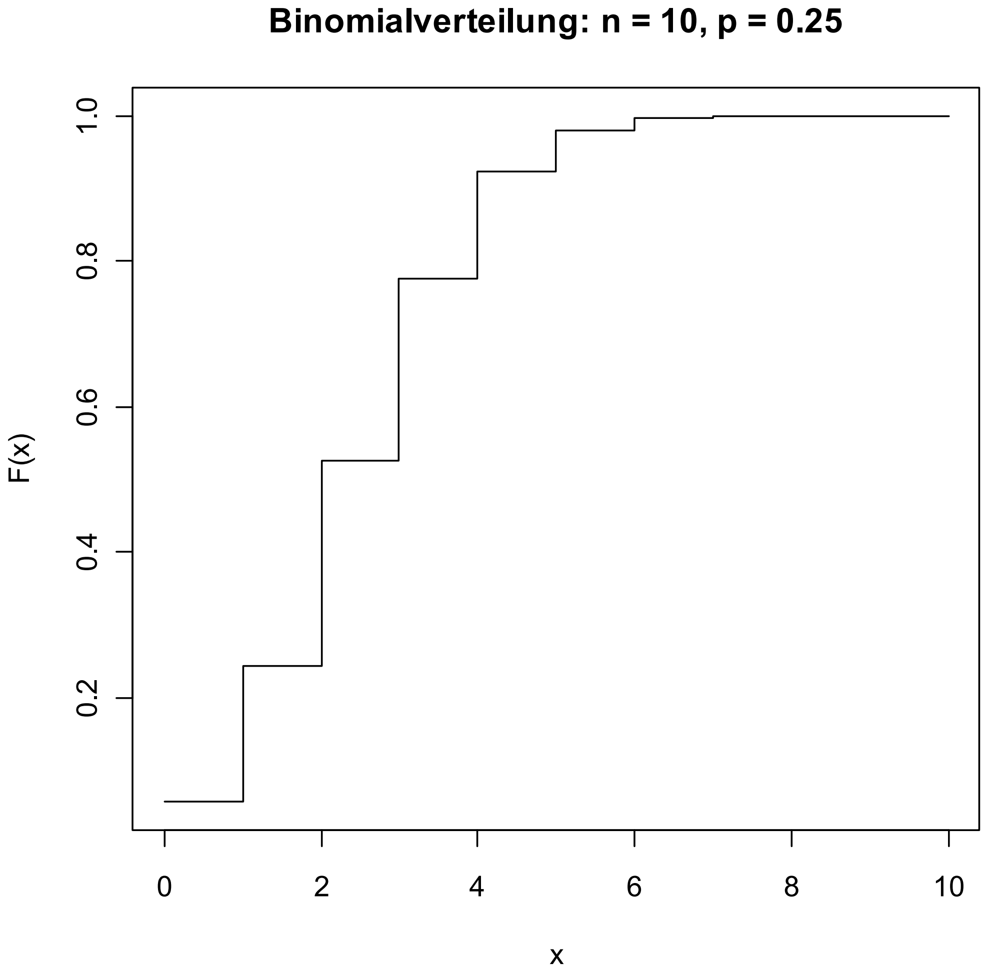
1. Erstellen Sie per Hand oder mit Hilfe eines Statistik- oder Tabellenkalkulationsprogramms die graphische Darstellung (a) der Wahrscheinlichkeitsverteilung und (b) der Verteilungsfunktion einer Zufallsvariablen *X*, die folgende Verteilung aufweist: $X \sim B(10, 0{,}25)$.

Mit dem Statistikprogramm R wurden folgende beiden Grafiken erstellt.

(a) Wahrscheinlichkeitsverteilung



(b) Verteilungsfunktion



2. Statistikdozent Ebehard W. leitet ein Seminar mit 30 Teilnehmenden im ersten Semester. Um die Aufmerksamkeit der Studierenden zu erhöhen, stellt er in unvorhersehbaren Abständen Fragen, zeigt zufällig auf einen Studierenden und bittet diesen, die Frage zu beantworten.
Angenommen, Herr W. stellt fünf Fragen:

(a) Wie viele Kombinationen aus Studierenden gäbe es, wenn man die Reihenfolge, in der die Studierenden drangenommen werden, mit berücksichtigt?

In diesem Fall würde es sich um ein Modell mit Zurücklegen und mit Berücksichtigung der Reihenfolge handeln. Gemäß Formel F 7.2 gibt es bei diesem Modell $K = k^n$ (mit k = Anzahl der möglichen Einzelergebnisse und n = Anzahl der Ziehungen) Kombinationen. Bei $k = 30$ möglichen Einzelergebnissen (d. h. Studierenden im Kurs) und $n = 5$ Wiederholungen ergeben sich insgesamt $K = 24.300.000$ Möglichkeiten.

(b) Wie viele Kombinationen aus Studierenden gäbe es, wenn man die Reihenfolge, in der die Studierenden drangenommen werden, nicht mit berücksichtigt?

In diesem Fall würde es sich um ein Modell mit Zurücklegen und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge handeln. Gemäß Formel F 7.6 gibt es bei diesem Modell $K = \binom{k+n-1}{n} = \frac{(k+n-1)!}{(k-1)! \cdot n!}$ (mit k = Anzahl der möglichen Einzelergebnisse und n = Anzahl der Ziehungen) Kombinationen. Bei k = 30 möglichen Einzelergebnissen (d. h. Studierenden im Kurs) und n = 5 Wiederholungen ergeben sich insgesamt

$$K = \frac{(30+5-1)!}{(30-1)! \cdot 5!} = \frac{2{,}95 \cdot 10^{38}}{1{,}06 \cdot 10^{33}} = 278.256 \text{ Möglichkeiten.}$$

(c) Wie groß ist in diesem Fall die Wahrscheinlichkeit, dass die Studentin Gisela F. fünfmal hintereinander drangenommen wird?

Diese Wahrscheinlichkeit lässt sich mit dem Multiplikationstheorem für unabhängige Ereignisse bestimmen. Bei Modell mit Zurücklegen und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge ist die Wahrscheinlichkeit, dass Gisela drangenommen wird, immer jeweils P = 1/30 = 0,33. Die Wahrscheinlichkeit, dass sie fünfmal hintereinander drangenommen wird, ist dementsprechend $P = (1/30)^5 = 4{,}115 \cdot 10^{-8} = 0{,}00000004$.

(d) Wie viele Kombinationen aus Studierenden gäbe es, wenn man die Reihenfolge, in der die Studierenden drangenommen werden, nicht mit berücksichtigt und wenn er diejenigen, die schon einmal drangekommen sind, nicht noch einmal aufruft?

In diesem Fall würde es sich um ein Modell ohne Zurücklegen und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge handeln. Gemäß Formel F 7.4 gibt es bei diesem Modell $K = \binom{k}{n} = \frac{k!}{(k-n)! \cdot n!}$ (mit k = Anzahl der möglichen Einzelergebnisse und n = Anzahl der Wiederholungen) Kombinationen. Bei k = 30 möglichen Einzelergebnissen (d. h. Studierenden im Kurs) und n = 5 Wiederholungen ergeben sich insgesamt

$$K = \frac{30!}{(30-5)! \cdot 5!} = \frac{2{,}65 \cdot 10^{32}}{1{,}86 \cdot 10^{27}} = 142.506 \text{ Möglichkeiten.}$$

3. Im Studiengang Psychologie an der Universität L. sind 120 Studierende im ersten Semester eingeschrieben, davon 90 Frauen. Von den 120 Studierenden hatten 40 in der Schule Mathematik im Leistungskurs, darunter 15 Frauen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine beliebige Studentin Mathematik im Leistungskurs hatte?

Gesucht ist die bedingte Wahrscheinlichkeit, Mathematik im Leistungskurs gehabt zu haben (Ereignis »ja«) unter der Bedingung, dass es sich um eine Studentin (Geschlecht = weiblich; Ereignis »w«) handelt. Formal: P(ja | w).

Gegeben sind folgende Wahrscheinlichkeiten:

- ► Die unbedingte Wahrscheinlichkeit des Ereignisses »w« (d. h. die relative Anzahl Frauen unter allen Studierenden): P(w) = 90/120 = 0,75
- ► Die unbedingte Wahrscheinlichkeit des Ereignisses »ja« (d. h. die relative Anzahl Studierender, die Mathematik im Leistungskurs hatten): P(ja) = 40/120 = 0,33

- Die bedingte Wahrscheinlichkeit des Ereignisses »w« unter der Bedingung »ja« (d. h. die relative Anzahl Frauen unter denjenigen Studierenden, die Mathematik im Leistungskurs hatten): $P(\text{w} \mid \text{ja}) = 15/40 = 0{,}375$.

Damit lässt sich die Wahrscheinlichkeit $P(\text{ja} \mid \text{w})$ bestimmen als die relative Anzahl aller Studierenden, die Mathematik im Leistungskurs hatten (also 15) unter allen weiblichen Studierenden (also 90): $P(\text{ja} \mid \text{w}) = 15/90 = 0{,}167$.

	Geschlecht		Summe
	weiblich (w)	männlich (m)	
Leistungskurs Mathematik (ja)	15	???	40
Kein LK Mathematik (nein)	???	???	???
Summe	*90*	*30*	120

bekannt:* *P(w | ja) = 0,375

bekannt:* *P(w) = 0,75

gesucht: ***P(ja | w)* = 0,167**

bekannt: ***P(ja)* = 0,33**

4. **Sie sind Psychologin bzw. Psychologe in einer Erziehungsberatungsstelle. Eines Tages kommt eine Mutter mit Ihrem Kind zu Ihnen und will wissen, ob ihr Kind an einer Aufmerksamkeitsdefizitstörung (ADS) leidet. Sie wissen, dass zurzeit ca. 5 von 100 Kindern eine solche Störung aufweisen. Sie wissen auch, dass Kinder mit dieser Störung mit einer Wahrscheinlichkeit von 80% in einem Konzentrationstest unterdurchschnittliche Werte erzielen. Sie führen den Konzentrationstest mit dem besagten Kind durch; in der Tat erzielt es einen unterdurchschnittlichen Wert. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass dieses Kind wirklich ADS hat?**

Gesucht ist die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass das Kind ADS hat (Ereignis »ja«) unter der Bedingung, dass es im Test einen unterdurchschnittlichen Wert erzielt (Ereignis »unter«). Formal: $P(\text{ja} \mid \text{unter})$.

Gegeben sind folgende Wahrscheinlichkeiten:

- Die unbedingte Wahrscheinlichkeit des Ereignisses »ja« (d. h. die relative Anzahl aller Kinder mit ADS): $P(\text{ja}) = 5/100 = 0{,}05$; die Gegenwahrscheinlichkeit (d. h. die relative Anteil aller Kinder ohne ADS) wäre dann $P(\text{nein}) = 0{,}95$.
- Die bedingte Wahrscheinlichkeit des Ereignisses »unter« unter der Bedingung »ja« (d. h. die relative Anzahl ADS-Kinder, die im Test unterdurchschnittliche Werte erzielen): $P(\text{unter} \mid \text{ja}) = 0{,}80$.
- Nehmen wir weiterhin an, dass die Verteilung der Messwerte des Konzentrationstests in der Population symmetrisch (und damit der Median gleich dem Mittelwert) sei. Damit sind dann auch die unbedingten Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse »unterdurchschnittlich« (»unter«) und »überdurchschnittlich« (»über«) gegeben: $P(\text{über}) = P(\text{unter}) = 0{,}50$.
- Damit ist gleichzeitig die Wahrscheinlichkeit gegeben, dass ein Kind ohne ADS unterdurchschnittliche Testwerte hat: $P(\text{unter} \mid \text{nein}) = \frac{P(\text{unter} \cap \text{nein})}{P(\text{nein})} = \frac{0{,}46}{0{,}95} = 0{,}484$.

Damit lässt sich die Wahrscheinlichkeit P(ja | unter) über das Bayes-Theorem (siehe Formel F 7.19) bestimmen:

$$P(\text{ja} \mid \text{unter}) = \frac{P(\text{unter} \mid \text{ja}) \cdot P(\text{ja})}{P(\text{unter} \mid \text{ja}) \cdot P(\text{ja}) + P(\text{unter} \mid \text{nein}) \cdot P(\text{nein})}$$
$$= \frac{0{,}80 \cdot 0{,}05}{0{,}80 \cdot 0{,}05 + 0{,}484 \cdot 0{,}95}$$
$$= \frac{0{,}04}{0{,}04 + 0{,}46} = 0{,}08$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kind, dessen Testwert unterdurchschnittlich ist, tatsächlich ADS hat, beträgt nur 8 %.

5. **Mathematiklehrerin Gundula A. möchte Klavierspielen lernen. Ihr Klavier hat – wie die meisten Klaviere – 88 Tasten, davon 52 weiße und 36 schwarze. Am Anfang kann sie noch kein Lied spielen und drückt wahllos Tasten. Nun fragt sie sich, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass sie beim wahllosen und zufälligen Drücken von 10 Tasten 5 weiße und 5 schwarze erwischt.**
Diese Wahrscheinlichkeit lässt sich mit Hilfe von Formel F 7.43 bestimmen:
$P(X = x) = \binom{n}{x} \cdot \pi^x \cdot (1-\pi)^{n-x}$ mit n = Anzahl der gedrückten Tasten (hier: n = 10), x = Anzahl weißer gedrückter Tasten (hier: x = 5) und π = unbedingte Wahrscheinlichkeit des Ereignisses »weiße Taste« (hier: $\pi = 52/88 = 0{,}59$). Damit ergibt sich die gesuchte Wahrscheinlichkeit zu: $P(X = 5) = \binom{10}{5} \cdot 0{,}59^5 \cdot 0{,}41^5 = 252 \cdot 0{,}072 \cdot 0{,}0115 = 0{,}208$. Die Wahrscheinlichkeit, dass von 10 wahllos gedrückten Tasten 5 weiß und 5 schwarz sind, beträgt also ca. 21%.

6. **Eine Zufallsvariable X sei exponentialverteilt mit $\lambda = 0.2$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, einen Wert von $x = 2$ oder kleiner zu erhalten?**
Gemäß Formel F 7.67 lautet die Verteilungsfunktion der Exponentialverteilung: $F(x) = 1 - e^{-\lambda \cdot x}$. Demnach ergibt sich für unser Beispiel $F(2) = 1 - e^{-0{,}2 \cdot 2} = 1 - 0{,}67 = 0{,}33$.

7. **Eine Zufallsvariable X sei normalverteilt mit $\mu = \sigma^2 = 100$.**
   (a) Wo liegen die Wendepunkte dieser Verteilung?
   Die Wendepunkte liegen bei $x_{W_1} = \mu - \sigma$ und $x_{W_2} = \mu + \sigma$. In unserem Beispiel also bei $x_{W_1} = 100 - 10 = 90$ und $x_{W_2} = 100 + 10 = 110$.

   (b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein beliebiger Wert x zwischen 80 und 120 liegt?
   Gefragt ist nach dem Flächenanteil unter der Normalverteilung, der zwischen einem Standardwert von $z = -2$ (d. h. 2 Standardabweichungseinheiten unterhalb des Mittelwertes) und einem Standardwert von $z = +2$ (d. h. 2 Standardabweichungseinheiten oberhalb des Mittelwertes) liegt, also $P(-2 \leq z \leq +2)$. Dieser Flächenanteil lässt sich unter Zuhilfenahme von Tabelle 7.3 ermitteln als $P = 1 - (2 \cdot 0{,}023) = 0{,}954$.

   (c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein beliebiger Wert x mindestens 140 beträgt?
   Gefragt ist nach dem Flächenanteil unter der Normalverteilung, der oberhalb eines Standardwertes von $z = 4$ liegt, also $P(4 \leq z \leq +\infty)$. Dieser Flächenanteil beträgt $P = 0{,}00003$.