

◀4>Lösungen zu den Übungsaufgaben in Kapitel 19

In den Online-Materialien finden Sie eine Datei mit dem Namen „daten_kap19aufg.txt“ sowie eine Anleitung zur Bedeutung der Variablen in den Spalten. Lesen Sie die Daten in ein Statistikprogramm (z. B. SPSS oder R) ein und lösen Sie die folgenden Aufgaben:

(1) Berechnen und interpretieren Sie die Intraklassen-Korrelation für die Variablen Peer-Status (*PEER*) und Leistungsfähigkeit (*LEISTUNG*).

Peer-Status: Für die Level-1-Residualvarianz ergibt sich ein Wert von $\hat{\sigma}_{\varepsilon}^2 = 60,95$; für die Varianz der zufälligen Achsenabschnitte ergibt sich ein Wert von $\hat{\sigma}_{\nu_0}^2 = 42,54$. Die Intraklassen-Korrelation (siehe Formel F 19.29) beträgt damit

$\hat{\rho} = \hat{\sigma}_{\nu_0}^2 / (\hat{\sigma}_{\nu_0}^2 + \hat{\sigma}_{\varepsilon}^2) = 42,54 / 103,49 = 0,411$. Das bedeutet: Ca. 41% der Varianz des Peer-Status geht auf Unterschiede zwischen den Klassen (d.h. Unterschiede in den Klassenmittelwerten) zurück, 59% der Varianz des Peer-Status geht auf Unterschiede zwischen Schülern innerhalb der Klassen zurück.

Leistungsfähigkeit: Für die Level-1-Residualvarianz ergibt sich ein Wert von $\hat{\sigma}_{\varepsilon}^2 = 19,69$; für die Varianz der zufälligen Achsenabschnitte ergibt sich ein Wert von $\hat{\sigma}_{\nu_0}^2 = 139,46$. Die Intraklassen-Korrelation (siehe Formel F 19.29) beträgt damit

$\hat{\rho} = \hat{\sigma}_{\nu_0}^2 / (\hat{\sigma}_{\nu_0}^2 + \hat{\sigma}_{\varepsilon}^2) = 139,46 / 159,15 = 0,88$. Das bedeutet: Ca. 88% der Varianz der Leistung geht auf Unterschiede zwischen den Klassen (d.h. Unterschiede in den Klassenmittelwerten) zurück, nur 12% der Varianz der Leistung geht auf Unterschiede zwischen Schülern innerhalb der Klassen zurück.

(2) Testen Sie mit Hilfe eines Random-Coefficients-Modells die Hypothese, dass der Peer-Status eines Schülers (\mathcal{Y}) von seiner Aggressionsneigung (\mathcal{X}) abhängt und dass dieser Effekt zwischen den Schulklassen unsystematisch variiert. Interpretieren Sie alle Modellparameter (einschließlich der Varianzkomponenten im zufälligen Teil des Modells) und inspizieren Sie, ob die Parameter signifikant von 0 abweichen.

Das Modell lautet hier:

Level-1:
$$PEER_{mi} = \beta_{0i} + \beta_{1i} \cdot AGG_{mi} + \varepsilon_{mi}$$

Level-2:
$$\begin{aligned} \beta_{0i} &= \gamma_{00} + \nu_{0i} \\ \beta_{1i} &= \gamma_{10} + \nu_{1i} \end{aligned}$$

Gesamtmodell: $PEER_{mi} = \gamma_{00} + \gamma_{10} \cdot AGG_{mi} + \nu_{0i} + \nu_{1i} \cdot AGG_{mi} + \varepsilon_{mi}$

	Schätzung	Standardfehler	Wert der Prüfgröße
Achsenabschnitt ($\hat{\gamma}_{00}$)	36,91	1,49	$t = 24,71^*$
Regressionsgewicht Aggression ($\hat{\gamma}_{10}$)	• 1,06	0,10	$t = \cdot 10,34^*$
Varianz der Level-1-Residuen ($\hat{\sigma}_{\varepsilon}^2$)	56,62	3,51	$z = 16,12^*$
Varianz der zufälligen Achsenabschnitte ($\hat{\sigma}_{\nu_0}^2$)	12,81	17,61	$z = 0,73$
Varianz der zufälligen Regressionsgewichte ($\hat{\sigma}_{\nu_1}^2$)	0,04	0,08	$z = 0,57$
Kovarianz $\hat{\sigma}_{\nu_0\nu_1}$	-0,58	1,19	$z = -0,49$

Die mit * gekennzeichneten Werte der jeweiligen Prüfgrößen sind auf dem 5%-Niveau signifikant, die nicht gekennzeichneten Werte weichen nicht bedeutsam von 0 ab. Die Aggressionsneigung der Schüler hat demnach einen bedeutsamen negativen Einfluss auf den Peer-Status; die Unterschiede zwischen den Klassen hinsichtlich der zufälligen Achsenabschnitte und der zufälligen Regressionsgewichte sind hingegen nicht bedeutsam. Allerdings bleibt ein beträchtlicher Teil der Varianz im Peer-Status auf Schülerebene unaufgeklärt.

(3) Wie groß ist der Anteil der Varianz der Variablen Peer-Status (Y), der durch die Aggressionsneigung (X) aufgeklärt wird?

Die anteilige Reduktion der Level-1-Residualvarianz berechnet sich laut Formel F 19.31 aus der Level-1-Residualvarianz eines Random-Intercept-Modells (d.h. ohne zufällige Regressionsgewichte) und der Level-1-Residualvarianz des Intercept-Only-Modells. Die Level-1-Residualvarianz eines Random-Intercept-Modells beträgt $\hat{\sigma}_{\varepsilon_2}^2 = 56,79$. Die Level-1-Residualvarianz des Intercept-Only-Modells beträgt $\hat{\sigma}_{\varepsilon_1}^2 = 60,95$. Damit beträgt die anteilige Reduktion der Level-1-Residualvarianz

$R_X^2 = (\hat{\sigma}_{\varepsilon_1}^2 - \hat{\sigma}_{\varepsilon_2}^2) / \hat{\sigma}_{\varepsilon_1}^2 = (60,95 - 56,79) / 60,95 = 0,068$. Das bedeutet: Ca. 7% der Varianz im Peer-Status auf Schülerebene kann durch die Aggressionsneigung aufgeklärt werden.

Die anteilige Reduktion der Gesamtvarianz (s. Formel F 19.32) beträgt

$$R_X^{2'} = \frac{(\hat{\sigma}_{\nu_{0-1}}^2 + \hat{\sigma}_{\varepsilon-1}^2) - (\hat{\sigma}_{\nu_{0-2}}^2 + \hat{\sigma}_{\varepsilon-2}^2)}{\hat{\sigma}_{\nu_{0-1}}^2 + \hat{\sigma}_{\varepsilon-1}^2} = \frac{103,49 - 63,17}{103,49} = 0,39. \text{ Das bedeutet: Ca. 39\% der}$$

Varianz im Peer-Status (insgesamt, d.h. auf Schüler- und auf Klassenebene gemeinsam) kann durch die Aggressionsneigung aufgeklärt werden. Der große Unterschied zwischen R_X^2 und $R_X^{2'}$ legt nahe, dass es auch auf Klassenebene einen beträchtlichen Teil aufgeklärte Varianz des Peer-Status durch die Aggressionsneigung der Schüler gibt.

(4) Testen Sie die Hypothese, dass der Effekt der Aggressionsneigung eines Schülers innerhalb der Klasse (X) auf die Leistungsfähigkeit (Y) davon abhängt, wie groß der Jungenanteil in einer Klasse (Z) ist; d. h., testen Sie die Interaktion X*Z. Interpretieren Sie die Modellparameter. Wie viel Varianz klärt der Interaktionseffekt auf?

Das Modell lautet hier:

Level-1: $LEIST_{mi} = \beta_{0i} + \beta_{1i} \cdot AGG_{mi} + \varepsilon_{mi}$

Level-2: $\beta_{0i} = \gamma_{00} + \gamma_{01} \cdot AJ_i + \nu_{0i}$
 $\beta_{1i} = \gamma_{10} + \gamma_{11} \cdot AJ_i + \nu_{1i}$

Gesamtmodell: $LEIST_{mi} = \gamma_{00} + \gamma_{10} \cdot AGG_{mi} + \gamma_{01} \cdot AJ_i + \gamma_{11} \cdot AGG_{mi} \cdot AJ_i + \nu_{0i} + \nu_{1i} \cdot AGG_{mi} + \varepsilon_{mi}$

Die Schätzungen der einzelnen Modellparameter sind in der folgenden Tabelle abgetragen. Dabei wurden die beiden unabhängigen Variablen AGG und AJ an ihrem jeweiligen Gesamtmittelwert (*grand mean*) standardisiert, um Multikollinearität durch die Hinzunahme des Produktterms zu vermeiden (s. Kap. 18).

	Schätzung (Standardfehler)
Achsenabschnitt ($\hat{\gamma}_{00}$)	36,18 (1,84)
Aggressionsneigung AGG ($\hat{\gamma}_{10}$)	• 3,56 (1,08)
Relative Anzahl Jungen pro Klasse AJ ($\hat{\gamma}_{01}$)	1,66 (1,85)
Cross-Level-Interaktion AGG × AJ ($\hat{\gamma}_{11}$)	• 1,50 (1,12)
Varianz der Level-1-Residuen ($\hat{\sigma}_{\varepsilon}^2$)	19,50 (1,25)

Varianz der zufälligen Achsenabschnitte ($\hat{\sigma}_{\nu_0}^2$)	67,75 (29,83)
Varianz der zufälligen Regressionsgewichte ($\hat{\sigma}_{\nu_1}^2$)	7,67 (8,09)
Kovarianz ($\hat{\sigma}_{\nu_0\nu_1}$)	2,08 (10,48)

Der Effekt der Cross-Level-Interaktion $X \times Z$ (oder $AGG \times AJ$), ausgedrückt durch den Parameter β_{11} , ist hier nicht signifikant, $t = \beta_{11} / 1,12 = 1,34$; $p = 0,19$. Der Effekt der Aggressionsneigung auf die Leistungsfähigkeit hängt also nicht von der Anzahl Jungen pro Klasse ab. Der standardisierte Effekt der Interaktion kann mit Hilfe von Formel F 19.44 geschätzt werden. Die Varianz der zufälligen Regressionsgewichte im Modell mit

Interaktionsterm beträgt $\hat{\sigma}_{\nu_{1,2}}^2 = 7,674$; die Varianz der zufälligen Regressionsgewichte im Modell ohne Interaktionsterm beträgt $\hat{\sigma}_{\nu_{1,1}}^2 = 7,924$. Daraus ergibt sich ein Wert von

$R_{X \times Z}^2 = (\hat{\sigma}_{\nu_{1,1}}^2 - \hat{\sigma}_{\nu_{1,2}}^2) / \hat{\sigma}_{\nu_{1,1}}^2 = (7,924 - 7,674) / 7,924 = 0,032$. Der Interaktionseffekt klärt also einen Anteil von 3,2% der Varianz in den zufälligen Regressionsgewichten auf.

(5) Prüfen Sie über einen direkten Modellvergleich, ob das Modell mit Interaktionseffekt $X \times Z$ signifikant besser auf die Daten passt als das Modell ohne Interaktionseffekt.

Die Devianz eines Random-Coefficients-Modells ohne den Interaktionsterm beträgt $Dev_1 = 3278,875$. Die Devianz eines Random-Coefficients-Modells mit dem Interaktionsterm beträgt $Dev_2 = 3275,043$. Die beiden Devianzen lassen sich mit Hilfe von Formel F 19.25 direkt miteinander vergleichen: $Dev = Dev_1 - Dev_2$. In unserem Beispiel ergibt sich ein Wert von $Dev = 3,83$. Diese Differenz ist approximativ χ^2 -verteilt mit $df = q_2 \cdot q_1$ Freiheitsgraden. In unserem Beispiel ist $df = 1$. Der kritische Wert auf einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0,05$ (einseitiger Test) beträgt $\chi_{(0,95;1)}^2 = 3,84$. Unser Wert liegt knapp unter diesem kritischen Wert; das Modell, das den Interaktionsterm mit einschließt, passt demnach nicht signifikant besser auf die Daten als das Modell, das den Interaktionsterm nicht mit einschließt.