

## Lösungen der Übungen aus Kapitel 24

- (1) Zeigen Sie, dass es sich bei  $\gamma_{21} = -0,71$  und  $\gamma_{22} = 0,71$  bzw.  $\gamma_{21} = 0,71$  und  $\gamma_{22} = -0,71$  jeweils um die Elemente eines Eigenvektors zum zweiten Eigenwert des Beispiels im Vertiefungskasten in Abschnitt 24.3.1 handelt.

Wenn es sich bei den Zahlen um Elemente eines Eigenvektors zum zweiten Eigenwert  $\delta_2 = 0,30$  handelt, müssen sie folgende Bedingung erfüllen:

$$\begin{bmatrix} 1 - \delta_2 & 0,7 \\ 0,7 & 1 - \delta_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \gamma_{21} \\ \gamma_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 0,3 & 0,7 \\ 0,7 & 1 - 0,3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \gamma_{21} \\ \gamma_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,7 & 0,7 \\ 0,7 & 0,7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \gamma_{21} \\ \gamma_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Es muss daher gelten:

$$0,7 \cdot \gamma_{21} + 0,7 \cdot \gamma_{22} = 0$$

$$0,7 \cdot \gamma_{21} + 0,7 \cdot \gamma_{22} = 0$$

Wie man sich durch Einsetzen der Werte verdeutlichen kann, sind diese beiden Gleichungen für beide Gruppen von  $\gamma$ -Koeffizienten erfüllt:

$$0,7 \cdot -0,7 + 0,7 \cdot 0,7 = 0$$

$$0,7 \cdot 0,7 + 0,7 \cdot -0,7 = 0$$

- (2) Zeigen Sie, dass man die Varianzen der Hauptkomponenten erhält, wenn man die Eigenvektoren und die Korrelation der beiden beobachteten Variablen des Beispiels im Vertiefungskasten in Abschnitt 24.3.1 in Gleichung F 24.5 einsetzt.

Gleichung F 24.5 lautet:

$$Var(H_1) = \gamma_{11}^2 + \gamma_{12}^2 + 2\gamma_{11}\gamma_{12}Cor(Z_1, Z_2). \quad (F 24.5)$$

Setzt man die  $\gamma$ -Koeffizienten und die Korrelation von  $r = 0,70$  ein, erhält man als Varianz der ersten Hauptkomponente:

$$Var(H_1) = 0,71^2 + 0,71^2 + 2 \cdot 0,71 \cdot 0,71 \cdot 0,70 = 0,5 + 0,5 + 0,70 = 1,70$$

Dieser Wert entspricht genau dem Wert des ersten Eigenwerts.

Für die zweite Hauptkomponente erhält man unter Rückgriff auf den zweiten Eigenvektor:

$$Var(H_2) = 0,71^2 + 0,71^2 - 2 \cdot 0,71 \cdot 0,71 \cdot 0,70 = 0,5 + 0,5 - 0,70 = 0,30$$

Dieser Wert entspricht genau dem Wert des zweiten Eigenwerts.

- (3) Berechnen Sie anhand des Datensatzes kap24.dat, der im Internetsupport  verfügbar ist, eine ML-Faktorenanalyse, eine Hauptkomponentenanalyse und eine Hauptachsenanalyse mit zwei Faktoren bzw. Hauptkomponenten, indem sie auf ein Statistikprogramm wie R oder CEFA zurückgreifen und replizieren Sie die in diesem Kapitel dargestellten Ergebnisse, indem Sie die Faktoren einer Varimax- und einer direkten Quartimin-Rotation unterziehen.

Die Daten entsprechen den drei Selbstberichts- und den drei Fremdberichtsvariablen des Beispiels, das in Kapitel 24 behandelt wurde. Die Ergebnisse entsprechen daher den in Kapitel 24 berichteten Ergebnissen.