

Zu Abschnitt 3.4.2: Statistische Tests auf Gruppenebene

Statistische Tests für Mittelwerte: Soziale Vergleiche

Beispiel 3: Lösen deutsche Schüler Probleme besser als österreichische Schüler?

Deutsche Schüler erreichten im PISA-Fähigkeitsbereich „Problemlösen“ im Durchschnitt $\bar{x}_1 = 513$ Punkte ($\hat{\sigma}_1 = 95$). Österreichische Schüler erzielten im Durchschnitt $\bar{x}_2 = 508$ Punkte ($\hat{\sigma}_2 = 85$). Nun stellt sich die Frage: Sind deutsche Schüler in diesem Test signifikant besser als österreichische?

Diese Frage lässt sich mit einem t -Test für unabhängige Stichproben beantworten (s. Eid et al., 2013; Abschn. 11.1.2). Auch hier benötigen wir *keine Originaldaten*; der Test kann sehr leicht „von Hand“ mit Hilfe der entsprechenden Formel berechnet werden. Der Wert der Prüfgröße berechnet sich wie folgt:

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\hat{\sigma}_{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}}$$

Dabei sind

- $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$ die empirische Mittelwertsdifferenz zwischen den beiden Gruppen (hier: deutsche und österreichische Schüler; $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 = 513 - 508 = 5$),
- $\hat{\sigma}_{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}$ die aus der Stichprobe geschätzte Standardabweichung der Stichprobenkennwerteverteilung von Mittelwertsdifferenzen aus Stichproben der Größen n_1 und n_2 .

Den Wert für $\hat{\sigma}_{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}$ müssen wir zunächst noch „von Hand“ ermitteln. Die Formel lautet:

$$\hat{\sigma}_{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)} = \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_1^2}{n_1} + \frac{\hat{\sigma}_2^2}{n_2}}$$

Dabei sind

- $\hat{\sigma}_1^2$ die aus der Stichprobe geschätzte Populationsvarianz der deutschen Schüler (hier: $\hat{\sigma}_1^2 = 9025$, denn $\hat{\sigma}_1 = 95$),
- $\hat{\sigma}_2^2$ die aus der Stichprobe geschätzte Populationsvarianz der österreichischen Schüler (hier: $\hat{\sigma}_2^2 = 7225$, denn $\hat{\sigma}_2 = 85$),
- n_1 und n_2 die Stichprobengrößen in beiden Gruppen. Gehen wir hier der Einfachheit davon aus, dass diese $n_1 = n_2 = 1000$ betragen.

Damit berechnet sich $\hat{\sigma}_{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)}$ wie folgt:

$$\hat{\sigma}_{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)} = \sqrt{\frac{9025}{1000} + \frac{7225}{1000}} = \sqrt{9,025 + 7,225} \approx 4,03$$

Damit berechnet sich der Wert der Prüfgröße T zu:

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\hat{\sigma}_{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)}} = \frac{5}{4,03} \approx 1,24$$

Die Quantile unter der t -Verteilung hängen von der Anzahl der Freiheitsgrade (df) ab. Diese berechnen sich hier zu

$$df = n - 2 = n_1 + n_2 - 2$$

Bei einer Gesamtstichprobengröße von $n = n_1 + n_2 = 2000$ benötigen wir eine t -Verteilung mit $df = n - 2 = 1998$ Freiheitsgraden. Die Wahrscheinlichkeit für den ermittelten (oder jeden größeren) t -Wert beträgt damit etwa $p = 0,11$. Auf dem 5%-Niveau ist die Differenz zwischen den beiden Mittelwerten demnach nicht signifikant. Man kann also nicht sagen, dass deutsche Schüler signifikant besser Probleme lösen können als österreichische.

Falls Sie dieses Beispiel selbst mit SPSS ausrechnen wollen:

Für dieses Beispiel liegen auch Originaldaten vor (KAP03_PISA.SAV). In dieser Datei finden Sie drei Variablen:

- eine Variable „nr“: Laufende Nummer für jeden Schüler
- eine Variable „gruppe“: Indikatorvariable, die angibt, ob der jeweilige Schüler aus Deutschland (Wert: `gruppe = 1`) oder aus Österreich (Wert: `gruppe = 2`) kommt
- eine Variable „pisa“: Wert eines jeden Schülers im PISA-Untertest „Problemlösen“ (fiktive Daten!).

Wenn Sie nun den Mittelwertsunterschied zwischen Deutschland und Österreich mit Hilfe eines *t*-Tests für unabhängige Stichproben in SPSS nachvollziehen möchten, können Sie das entweder mit Hilfe der SPSS-Syntax oder mit Hilfe der Menüführung.

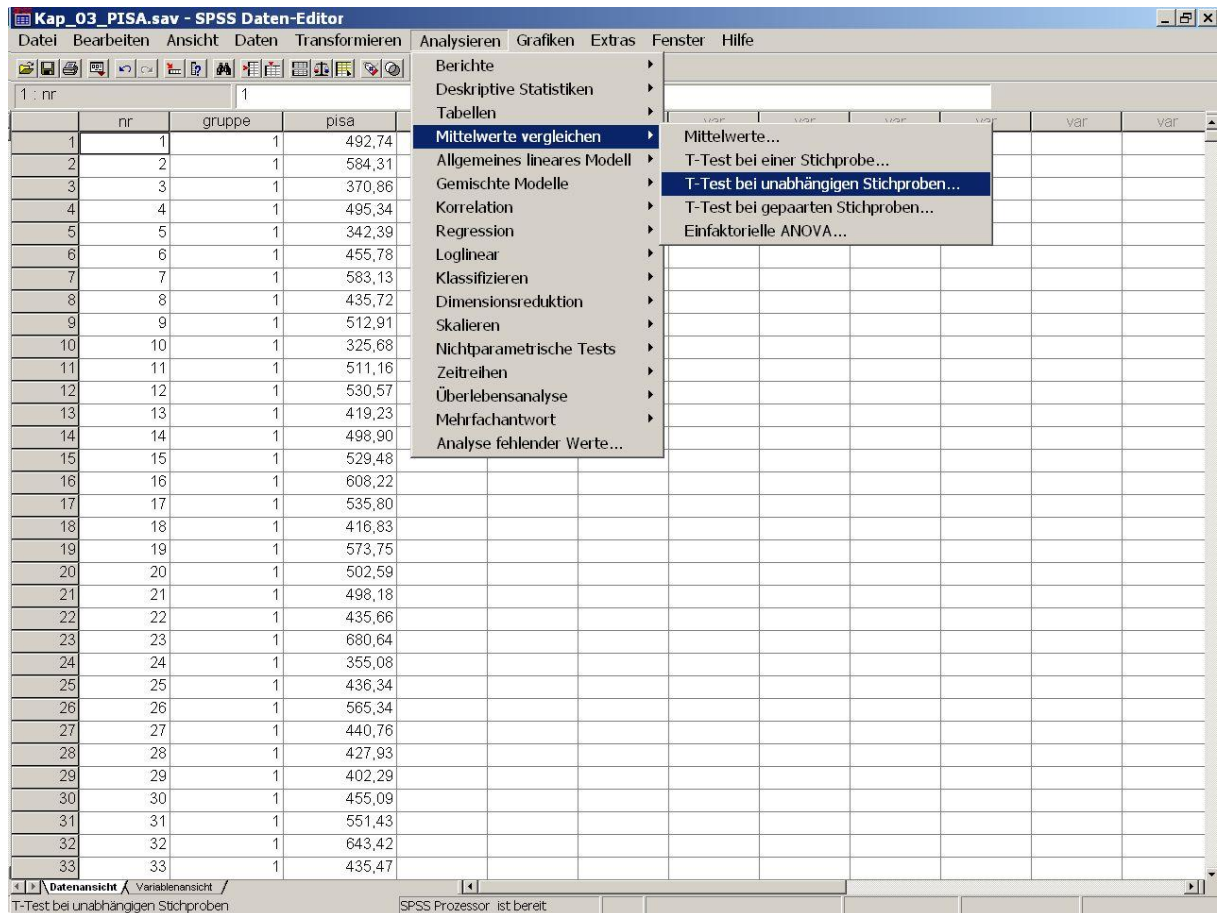
Die Syntax lautet:

T-TEST

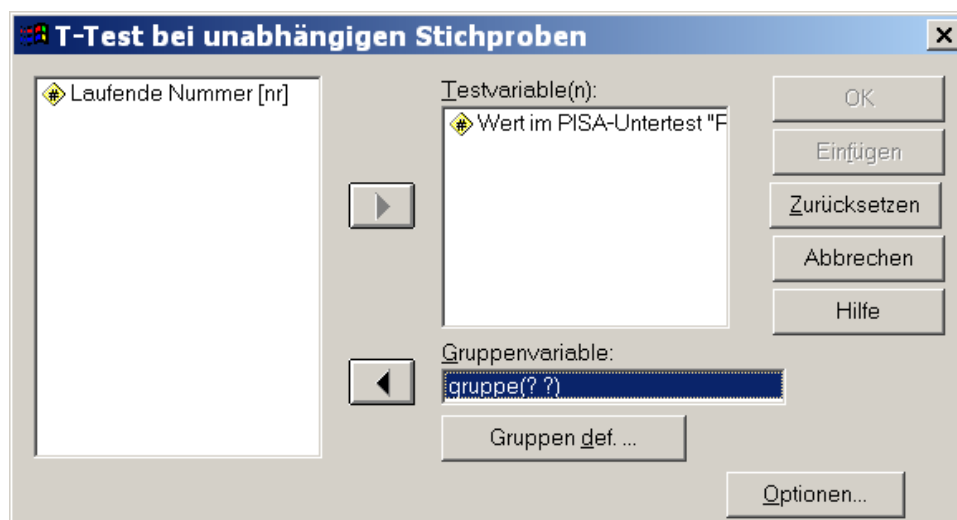
GROUPS = `gruppe(1 2)`

/VARIABLES = `pisa`.

Wenn Sie den Test über die Menüführung rechnen wollen, klicken Sie im Menü „Analysieren“ auf „Mittelwerte vergleichen“ und anschließend „T-Test bei unabhängigen Stichproben“ (s. Screenshot):



Es öffnet sich ein Dialogfenster mit dem Titel „T-Test bei unabhängigen Stichproben“. Geben Sie unter „Testvariable(n)“ die abhängige Variable „pisa“ ein. Geben Sie bei „Gruppenvariable“ die unabhängige Variable „gruppe“ ein.



Klicken Sie anschließend auf „Gruppen def. ...“. Es öffnet sich ein weiteres Dialogfenster. Geben Sie dort für die Gruppe 1 (Deutschland) den Wert 1 und für die Gruppe 2 (Österreich) den Wert 2.

Klicken Sie nun auf „Weiter“ und anschließend auf „OK“.

Nun öffnet sich das SPSS-Ausgabefenster und gibt die folgenden Tabellen aus:

Gruppenstatistiken

	gruppe Land	N	Mittelwert	Standardabweichung	Standardfehler des Mittelwertes
pisa Wert im PISA-Untertest "Problemlösen"	1 Deutschland	1000	512,9614	94,25551	2,98062
	2 Österreich	1000	507,9816	85,41842	2,70117

Test bei unabhängigen Stichproben

		Levene-Test der Varianzgleichheit		T-Test für die Mittelwertgleichheit						
		F	Signifikanz	T	df	Sig. (2-seitig)	Mittlere Differenz	Standardfehler der Differenz	95% Konfidenzintervall der Differenz	
pisa Wert im PISA-Untertest "Problemlösen"	Varianzen sind gleich	10,674	,001	1,238	1998	,216	4,97981	4,02249	-2,90890	12,86852
	Varianzen sind nicht gleich			1,238	1978,944	,216	4,97981	4,02249	-2,90894	12,86857

Die untere Tabelle zeigt: Der Wert der Prüfgröße beträgt bei $df = 1998$ Freiheitsgraden $t = 1,24$. Die (zweiseitige) Wahrscheinlichkeit für diesen (oder jeden noch extremeren) t -Wert wird mit $p = .216$ angegeben. Im Falle eines einseitigen Tests halbiert sich dieser Wert und beträgt entsprechend $p = .11$.

Falls Sie dieses Beispiel mit einem anderen Programm ausrechnen wollen:

Die Originaldaten für dieses Beispiel sind auch in einem allgemein lesbaren ASCII-Format abgespeichert (KAP03_PISA.DAT).