

Antworten zu Kapitel 3

Beschreibung und Bewertung von Zuständen

1 Sind die folgenden Aussagen richtig oder falsch?

1.1 In einer Klumpenstichprobe werden systematisch anfallende Cluster von Personen vollständig untersucht. Die Cluster hingegen werden zufällig aus der Menge aller möglichen Cluster in der Population gezogen.

Richtig.

1.2 In einer geschichteten Stichprobe werden die Elemente nach spezifischen Merkmalsausprägungen erhoben, wobei darauf geachtet wird, dass diese Merkmalsausprägungen so genau wie möglich die Verhältnisse in der Population widerspiegeln.

Falsch. Eine geschichtete Stichprobe ist vielmehr darüber definiert, dass aus vorher definierten Teilpopulationen zufällig Elemente gezogen werden.

1.3 Die Punktprävalenz gibt den Anteil der innerhalb eines bestimmten Zeitraums neu hinzugekommenen Erkrankten an.

Falsch. Die Prävalenz gibt die Anzahl all jener Individuen an, die zu einem bestimmten Zeitpunkt oder während einer bestimmten Zeitperiode krank sind.

1.4 Die Lebenszeitprävalenz gibt die Wahrscheinlichkeit an, mit der eine beliebige Person im Laufe ihres Lebens mindestens einmal positiv diagnostiziert wird.

Richtig.

2 Gisela hat in einem Test zur Messung von Ängstlichkeit einen Testwert von $x = 20$ erreicht. Der Test ist so geeicht, dass der Populationsmittelwert $\mu = 12$ und die Populationsstandardabweichung $\sigma_x = 2$ beträgt. In der Population sind die Werte normalverteilt.

2.1 Berechnen Sie den Standardwert (z-Wert) für Gisela.

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma_x} = \frac{20 - 12}{2} = 4.$$

2.2 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für diesen (oder jeden größeren) Wert unter der Verteilung aller möglichen Werte: Ist Gisela überzufällig ängstlich?

Ein z-Wert von 4 (oder größer) hat unter der Normalverteilung eine Wahrscheinlichkeit von $p = 0,000032$, ist also sehr unwahrscheinlich. Gisela ist demnach überzufällig ängstlich, da sie signifikant vom Populationsdurchschnitt abweicht.

2.3 Welchen Prozentrang hat Gisela?

Da die Wahrscheinlichkeit für einen z -Wert von 4 (oder größer) unter der Normalverteilung $p = 0,000032$ beträgt, beträgt der Prozentrang (d.h. der Anteil derjenigen Personen, die einen kleineren Wert haben): $PR = (1 - 0,000032) \cdot 100 = 99,99\%$.

3 Von 1000 zufällig befragten Personen in Rheinland-Pfalz sind 40 arbeitslos, in Hessen sind es von ebenfalls 1000 zufällig befragten Personen 70. Beurteilen Sie die statistische Bedeutsamkeit dieses Unterschieds anhand eines χ^2 -Tests.

Diese Frage kann mit Hilfe eines Vierfelder- χ^2 -Tests (s. Eid et al., 2013; Abschn. 11.4.1) beantwortet werden. Ausgeschrieben ergibt sich folgende Vierfelder-Kontingenztafel:

	Rheinland-Pfalz	Hessen	Summe
arbeitslos	$n_{11} = 40$	$n_{12} = 70$	$n_{1\bullet} = 110$
nicht arbeitslos	$n_{21} = 960$	$n_{22} = 930$	$n_{2\bullet} = 1890$
Summe	$n_{\bullet 1} = 1000$	$n_{\bullet 2} = 1000$	$n = 2000$

Der Wert der Prüfgröße berechnet sich wie folgt:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^k \frac{(n_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}}$$

mit

- $i \in \{1, \dots, p\}$ Kategorien in den Zeilen der Tabelle (hier gibt es $p = 2$ Kategorien: $i = 1$ für arbeitslos, $i = 2$ für nicht arbeitslos).
- $j \in \{1, \dots, k\}$ Kategorien in den Spalten der Tabelle (hier gibt es $k = 2$ Kategorien: $j = 1$ für Rheinland-Pfalz, $j = 2$ für Hessen).
- n_{ij} = Beobachtete Häufigkeit in einer Zelle ij ,
- e_{ij} = Erwartete Häufigkeit in einer Zelle ij unter der Nullhypothese.

Die erwarteten Häufigkeiten unter der Nullhypothese (gleiche Arbeitslosenquote in Rheinland-Pfalz und Hessen) berechnen sich wie folgt:

$$e_{ij} = \frac{n_{i\bullet} \cdot n_{\bullet j}}{n}$$

wobei $n_{i\bullet}$ für die Spaltensumme innerhalb einer Zeile i und $n_{\bullet j}$ für die Zeilensumme innerhalb einer Spalte j steht. Damit ergibt sich folgende Tabelle

	Rheinland-Pfalz	Hessen	Summe
arbeitslos	$e_{11} = 55$	$e_{12} = 55$	$n_{1\bullet} = 110$
nicht arbeitslos	$e_{21} = 945$	$e_{22} = 945$	$n_{2\bullet} = 1890$
Summe	$n_{\bullet 1} = 1000$	$n_{\bullet 2} = 1000$	$n = 2000$

Berechnet man nun aus den beobachteten und den erwarteten Zellhäufigkeiten den Wert der Prüfgröße χ^2 , so erhält man $\chi^2 = 8,658$. In unserem Fall hat die χ^2 -Verteilung $df = 1$ Freiheitsgrad. Die Wahrscheinlichkeit für diesen (oder jeden größeren) χ^2 -Wert beträgt etwa $p = 0,0033$. Dies bedeutet: Die Abweichung der empirischen von der erwarteten Verteilung ist signifikant. Man kann sagen, dass es in Hessen mehr Arbeitslose gibt als in Rheinland-Pfalz.

4 In einer Stichprobe mit $n_1 = 500$ Männern und $n_2 = 500$ Frauen beträgt der Unterschied in der Intelligenz (gemessen mit einem Intelligenztest) $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 = 3$ ($\hat{\sigma}_1 = \hat{\sigma}_2 = 15$). Beurteilen Sie die statistische Bedeutsamkeit dieses Unterschieds anhand eines t-Tests für unabhängige Stichproben. Beurteilen Sie die praktische Bedeutsamkeit dieses Unterschieds anhand des d -Maßes von Cohen (1988)!

Der Wert der Prüfgröße beim t -Test für unabhängige Stichproben lautet:

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\hat{\sigma}_{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}}$$

Dabei sind

- $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$ die empirische Mittelwertsdifferenz zwischen den beiden Gruppen (hier: Männer vs. Frauen; $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 = 3$),
- $\hat{\sigma}_{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}$ die aus der Stichprobe geschätzte Standardabweichung der Stichprobenkennwerteverteilung von Mittelwertsdifferenzen aus Stichproben der Größen n_1 und n_2 . Diese lässt sich wie folgt ermitteln:

$$\hat{\sigma}_{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)} = \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_{x_1}^2}{n_1} + \frac{\hat{\sigma}_{x_2}^2}{n_2}} = \sqrt{\frac{225}{500} + \frac{225}{500}} = \sqrt{0,90} = 0,95.$$

Damit berechnet sich der Wert der Prüfgröße wie folgt:

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\hat{\sigma}_{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}} = \frac{3}{0,95} \approx 3,16.$$

Bei $df = n_1 + n_2 - 2 = 998$ Freiheitsgraden beträgt die Wahrscheinlichkeit für diesen oder jeden noch extremer gegen die Nullhypothese sprechenden Wert $p = 0,0008$. Der Geschlechtsunterschied in der Intelligenz ist also hoch signifikant im Sinne von „statistisch bedeutsam“.

Berechnet man nun die empirische Effektstärke (Cohen's d), so ergibt sich:

$$d' = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\hat{\sigma}_x} = \frac{3}{15} = 0,2.$$

Dies entspricht jedoch nur einem kleinen Effekt. Die „praktische Bedeutsamkeit“ des Geschlechtsunterschieds in der Intelligenz ist also gering.