## Lösungen zu den Übungsaufgaben in Kapitel 10

**(1) In einer Stichprobe mit $n$ = 10 Personen werden für ein stetiges Merkmal $X$ folgende Werte beobachtet: {92; 96; 96; 106; 112; 114; 114; 118; 123; 124}. Sie gehen davon aus, dass Mittelwert und Median in der Population $\mu_0 = \eta_0 = 100$ betragen. Überprüfen Sie, ob die zentrale Tendenz in dieser Stichprobe signifikant von $\mu_0$ bzw. $\eta_0$ abweicht. Führen Sie**

**(a) einen Einstichproben-$t$-Test (mit der aus den Daten geschätzten Populationsstandardabweichung),**

**(b) einen Vorzeichentest und**

**(c) einen Wilcoxon-Vorzeichen-Rangtest durch.**

**Gehen Sie von einem zweiseitigen Test auf einem Signifikanzniveau von α = 5 % aus.**

(a) Einstichproben-$t$-Test: Das statistische Hypothesenpaar lautet:

$$H_0\text{: } \mu = \mu_0 \text{ oder } \mu - \mu_0 = 0$$
$$H_1\text{: } \mu \neq \mu_0 \text{ oder } \mu - \mu_0 \neq 0$$

Der Stichprobenmittelwert liegt in diesem Datenbeispiel bei $x$ = 109,5. Die Stichproben-standardabweichung (geschätzte Populationsstandardabweichung) beträgt $\hat{\sigma}_X$ = 11,52. Der geschätzte Standardfehler des Mittelwerts beträgt gemäß Formel F 8.23 also $\hat{\sigma}_{\bar{X}} = \hat{\sigma}_X / \sqrt{n} = 11{,}52/3{,}16 =$ 3,64. Damit ergibt sich gemäß Formel F 8.25 ein empirischer $t$-Wert von $t = (109{,}5 - 100)/3{,}64 =$ 2,61. Der kritische $t$-Wert für ein Signifikanzniveau von $\alpha$ = 5% beträgt bei einem zweiseitigen Test $t(0{,}975;9)$ = 2,26. Der empirische $t$-Wert ist größer als der kritische Wert und liegt damit im Ablehnungsbereich unter der Nullhypothese; die $H_0$ kann also verworfen werden.

(b) Vorzeichentest: Das statistische Hypothesenpaar lautet:

$$H_0\text{: } \eta = \eta_0 \text{ oder } \eta - \eta_0 = 0$$
$$H_1\text{: } \eta \neq \eta_0 \text{ oder } \eta - \eta_0 \neq 0$$

Zunächst muss der Wert der Prüfgröße $S$, d. h. die Anzahl aller Fälle, die einen Wert haben, der unterhalb des angenommenen Populationsmedians unter der Nullhypothese ($\eta_0$ = 100) liegt, bestimmt werden. Dies trifft auf $s$ = 3 Fälle zu ($x_1$ = 92; $x_2$ = 96; $x_3$ = 96). Unter der Nullhypothese ($\pi_0$ = 0,5) würde man $n \cdot 0{,}5 = 10 \cdot 0{,}5 = 5$ Fälle erwarten. Der empirische Wert schneidet unter der Binomialverteilung einen Flächanteil von $p = P(s \leq 3 \mid \pi_0 = 0{,}5; n = 10) = 0{,}1719$ nach links ab (vgl. Tabelle A.1 in Anhang A). Die $H_0$ kann nicht verworfen werden.

(c) Wilcoxon-Vorzeichen-Rangtest: Das statistische Hypothesenpaar entspricht dem des Vorzeichentests (s. o.). Um die Prüfgröße $W^+$ zu ermitteln, muss zunächst für jeden $x_m$-Wert die Differenz zum theoretisch postulierten Populationsmedian ($\eta_0$ = 100) berechnet werden. Anschließend werden den Absolutbeträgen dieser Differenzen Rangplätze in aufsteigender Reihenfolge zugewiesen. Schließlich wird die Summe jener Rangplätze gebildet, deren Differenzwert positiv war.

| $m$ | $x_m$ | $d_m$ | $\|d_m\|$ | Rang |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 92 | −8 | 8 | 4 |
| 2 | 96 | −4 | 4 | 1,5 |
| 3 | 96 | −4 | 4 | 1,5 |
| 4 | 106 | +6 | 6 | 3 |
| 5 | 112 | +12 | 12 | 5 |
| 6 | 114 | +14 | 14 | 6,5 |
| 7 | 114 | +14 | 14 | 6,5 |
| 8 | 118 | +18 | 18 | 8 |
| 9 | 123 | +23 | 23 | 9 |
| 10 | 124 | +24 | 24 | 10 |

Dies trifft auf sieben Fälle ($x_4$ bis $x_{10}$) zu. Die Summe der entsprechenden Rangplätze ist $w^+ = 48$. Mit Hilfe von Tabelle A.4 in Anhang A lässt sich der kritische Wert für $w^+$ bei $n = 10$ bei $\alpha = 0{,}05$ (zweiseitiger Test, daher muss das 0,975-Quantil abgelesen werden!) ermitteln. Er beträgt $w^+_{(0{,}975)} = 45$. Unser empirisch ermittelter Wert liegt darüber. Die Nullhypothese kann verworfen werden.

**(2) Ein Forscher möchte testen, ob es innerhalb der Mitglieder der politischen Partei »PfR« (Partei für Reiche) eine größere Heterogenität in Bezug auf die Einstellung gegenüber der Globalisierung gibt als in der Gesamtbevölkerung. Die Einstellung gegenüber der Globalisierung ($X$) wird mit Hilfe eines entsprechenden Fragebogeninstruments gemessen. Die Werte reichen von -5 (starke Ablehnung) bis +5 (starke Befürwortung). In einer Stichprobe von $n = 120$ Mitgliedern der Partei PfR wird ein Mittelwert von $\bar{x} = 2$ und eine Stichprobenvarianz von $\hat{\sigma}^2_X = 12{,}10$ ermittelt. Der Forscher vermutet, dass das Merkmal in der Population normalverteilt ist mit $\mu_0 = -0{,}5$ und $\sigma^2_0 = 10$.**

**(a) Testen Sie, ob die Stichprobenvarianz $\hat{\sigma}^2_X$ signifikant größer ist als die postulierte Populationsvarianz $\sigma^2_0$ ($\alpha = 5$ %; einseitiger Test).**

Das statistische Hypothesenpaar lautet hier:

$$H_0\text{: } \sigma^2_X \le \sigma^2_0 \quad \text{oder} \quad \frac{\sigma^2_X}{\sigma^2_0} \le 1$$

$$H_1\text{: } \sigma^2_X > \sigma^2_0 \quad \text{oder} \quad \frac{\sigma^2_X}{\sigma^2_0} > 1$$

Zunächst muss nach Formel F 10.14d der Wert der Prüfgröße $\chi^2$ berechnet werden. Hierfür ergibt sich $\chi^2 = \frac{\hat{\sigma}^2_X}{\sigma^2_0} \cdot (n-1) = \frac{12{,}1}{10} \cdot 119 = 144$. Der kritische Wert beträgt $\chi^2_{(0{,}95;119)} = 145{,}5$. Der empirische $\chi^2$-Wert liegt (sehr knapp) unterhalb des kritischen Wertes; die Nullhypothese kann daher also nicht abgelehnt werden.

**(b) Wie groß ist die empirische Effektgröße? Wo liegen die Grenzen des zweiseitigen 90%-Konfidenzintervalls für diese Effektgröße?**

Der geschätzte Wert der empirischen Effektgröße beträgt in diesem Beispiel $v = \frac{\hat{\sigma}_X^2}{\sigma_0^2} = \frac{12{,}1}{10} = 1{,}21$.

Hieraus ergeben sich nach Formel F 10.20a die Grenzen des zweiseitigen 95%-Konfidenzintervall wie folgt: $\upsilon_{\mathrm{u}} = \frac{v}{\chi^2_{(0{,}95;\,119)}} \cdot (n-1) = \frac{1{,}21}{145{,}46} \cdot 119 = 0{,}99$ und $\upsilon_{\mathrm{o}} = \frac{v}{\chi^2_{(0{,}05;\,119)}} \cdot (n-1) = \frac{1{,}21}{94{,}81} \cdot 119 = 1{,}52$. Ein Bereich zwischen 0,99 und 1,52 überdeckt also mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% den wahren Populationseffekt $\upsilon$. Der Wert 1 liegt gerade noch in diesem Konfidenzintervall; das korrespondiert mit dem Ergebnis des statistischen Tests aus Aufgabe (a): Die geschätzte Populationsvarianz ist nicht signifikant größer als die unter der Nullhypothese postulierte Populationsvarianz.

**(c) Wenn wir die gerade ermittelte empirische Effektgröße als Schätzer für den Populationseffekt verwenden: Wie groß war die Wahrscheinlichkeit, diesen Effekt zu finden, wenn es ihn tatsächlich gibt?**

Hier ist nach der Teststärke für den chi-quadrat-Test mit $\alpha$ = 5% (einseitiger Test), $n$ = 120 und $\upsilon_1 = \hat{\upsilon}$ = 1,21 gefragt. Mit Hilfe des Programms G*Power (Testfamilie: $\chi^2$; Statistischer Test: Varianz – Abweichung von einer Konstante [Einstichprobenfall]; Poweranalysetyp: Post hoc) ermitteln wir eine Teststärke von 1 – $\beta$ = 0,45. Die Chance, einen Effekt der Größe $\upsilon_1$ = 1,21 mit einer Stichprobengröße von $n$ = 120 zu finden, oder – genauer gesagt – die Wahrscheinlichkeit, mit der der chi-quadrat-Test auf einem Signifikanzniveau von $\alpha$ = 5% (einseitiger Test) bei $n$ = 120 Personen signifikant wird, wenn der Populationseffekt $\upsilon_1$ = 1,21 beträgt, ist mit 45% relativ gering.

**(d) Wie viele Personen hätte man benötigt, um den geschätzten Populationseffekt mit einer Wahrscheinlichkeit von 1 – $\beta$ = 90 % zu finden, wenn es ihn tatsächlich gibt?**

Hier ist nach der optimalen Stichprobengröße für den chi-quadrat-Test mit $\alpha$ = 5 % (einseitiger Test), 1 – $\beta$ = 90 % und $\upsilon_1 = \hat{\upsilon}$ = 1,21 gefragt. Mit Hilfe des Programms G*Power ermitteln wir einen Wert von $n$ = 470. So viele Personen hätte man benötigt, um mit einer Wahrscheinlichkeit von 1 – $\beta$ = 90 % einen Effekt von $\upsilon_1$ = 1,21 zu finden, wenn es diesen Effekt tatsächlich geben sollte.

**(3) Im Abschnitt zum Binomialtest auf Abweichung einer Wahrscheinlichkeit von einer fixen theoretischen Wahrscheinlichkeit (Abschn. 10.4) hatten wir als Beispiel die Fragestellung herangezogen, ob man sich in der ersten Jahreshälfte eher verliebt als in der zweiten. In unserem Datenbeispiel mit $n$ = 300 Paaren und einer Häufigkeit von $n_1$ = 182 ($h_1$ = 0,607) ergab sich bei $H_0$: $\pi_0$ = 0,5 eine signifikante Abweichung.**

**(a) Wo liegen die Grenzen des zweiseitigen 90 %-Konfidenzintervalls für die Wahrscheinlichkeit $\pi$?**

Die Grenzen des zweiseitigen 90 %-Konfidenzintervalls bestimmen wir mit Hilfe der Formeln F 10.23 und F 10.24. In unserem Beispiel erhalten wir folgende Werte:

$$\pi_{\mathrm{u}} = \frac{2 \cdot 300 \cdot 0{,}607 + 2{,}71 - 1{,}65 \cdot 17}{2 \cdot (300 + 2{,}71)} = 0{,}56 \text{ und } \pi_{\mathrm{o}} = \frac{2 \cdot 300 \cdot 0{,}607 + 2{,}71 + 1{,}65 \cdot 17}{2 \cdot (300 + 2{,}71)} = 0{,}65.$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 % wird also die »wahre« Wahrscheinlichkeit $\pi$ von dem Intervall [0,56; 0,65] überdeckt. Der Wert 0,5 liegt nicht mehr im Konfidenzintervall; das korrespondiert mit dem signifikanten Testergebnis.

**(b) Wie groß ist in diesem Beispiel die empirische Effektstärke *g*?**

Die empirische Effektstärke beträgt in diesem Beispiel $g = h_1 - \pi_0 = 0{,}607 - 0{,}5 = 0{,}107$.

**(c) Wie viele Paare hätte man benötigt, um unter der Annahme, es gebe einen Effekt der Größe $\gamma_1$ = 0,25 in der Population, mit einer Wahrscheinlichkeit von $1 - \beta$ = 95 % die Nullhypothese ablehnen zu können ($\alpha$ = 5 %, einseitiger Test)?**

Dies können wir bspw. mit Hilfe des Programms G*Power bestimmen (Testfamilie: Exakt; Statistischer Test: Verhältnisse, Abweichungen von einer Konstanten [Binomialtest, Einstichprobenfall]; Poweranalysetyp: A priori). Wir geben in den Feldern folgende Werte ein: Einseitiger Test (Tails: One); Effektgröße: $\gamma_1 = 0{,}25$; Signifikanzniveau: $\alpha = 0{,}05$; Power: $1 - \beta = 0{,}95$; Fixer Wert (Constant proportion): $\pi_0 = 0{,}5$. Als optimale Stichprobengröße erhalten wir $n = 42$. Diese Größe hätte ausgereicht, um den Effekt zu finden, wenn es ihn tatsächlich gibt.