Lösungen zu den Übungsaufgaben aus Kapitel 23

(1) Zeigen Sie, dass

(a) die Parameter α_i im Modell essentiell τ-äquivalenter Variablen genau den Erwartungswerten der beobachteten Variablen Y_i entsprechen, wenn der gemeinsame Faktor η wie folgt normiert wird:

$$E(\eta) = 0$$

(b) die Erwartungswerte der beobachteten Variablen Y_i gleich dem Erwartungswert von η sind, falls $\alpha_i = 0$ gesetzt wird.

(a) Nach Gleichung F 23.15 gilt: $\alpha_i = E(Y_i) - E(\eta)$. Wählt man die Normierung $E(\eta) = 0$, folgt: $\alpha_i = E(Y_i) - 0 = E(Y_i)$.

(b) Nach Gleichung F 23.15 gilt: $\alpha_i = E(Y_i) - E(\eta)$. Setzt man $\alpha_i = 0$, folgt: $0 = E(Y_i) - E(\eta)$ und somit $E(Y_i) = E(\eta)$.

(2) Zeigen Sie, dass im Modell essentiell τ-äquivalenter Variablen die Kovarianzen der beobachteten Variablen gleich der Varianz von η sein müssen.

Im Modell essentiell τ-äquivalenter Variablen lässt sich eine beobachtete Variable Y_i nach Gleichung F 23.18 wie folgt zerlegen: $Y_i = \alpha_i + \eta + \varepsilon_i$. Für die Kovarianz zweier Variablen Y_i und Y_j, $i \neq j$, gilt nach den Rechenregeln (3) und (4) für Kovarianzen (s. Abschnitt 16.4.1) sowie der Tatsache, dass die Variable η mit allen Fehlervariablen unkorreliert ist und der Annahme der Unkorreliertheit der Fehlervariablen:

$$\begin{aligned}
Cov(Y_i, Y_j) &= Cov(\alpha_i + \eta + \varepsilon_i, \alpha_j + \eta + \varepsilon_j) = Cov(\eta + \varepsilon_i, \eta + \varepsilon_j) \\
&= Cov(\eta, \eta) + Cov(\eta, \varepsilon_j) + Cov(\varepsilon_i, \eta) + Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) \\
&= Cov(\eta, \eta) = Var(\eta)
\end{aligned}$$

(3) Zeigen Sie, dass im Modell essentiell τ-paralleler Variablen die Reliabilität einer Variablen Y_i gleich der Korrelation dieser Variablen mit einer Variablen Y_j $(i \neq j)$ ist.

Für die Korrelation zweier Variablen Y_i und Y_j gilt nach Gleichung F 16.32:

$$Kor(Y_i, Y_j) = \frac{Cov(Y_i, Y_j)}{\sqrt{Var(Y_i) \cdot Var(Y_j)}}$$

Da das Modell essentiell τ-paralleler Variablen ein Spezialfall des Modells essentiell τ-äquivalenter Variablen ist, gilt: $Cov(\eta, \eta) = Var(\eta)$. Aufgrund der Gleichheit der Fehlervarianzen gilt darüber hinaus: $Var(Y_i) = Var(\eta) + Var(\varepsilon_i) = Var(\eta) + Var(\varepsilon_j) = Var(Y_j)$. Daher ergibt sich für die Korrelation der beiden Variablen Y_i und Y_j:

$$Kor(Y_i, Y_j) = \frac{Cov(Y_i, Y_j)}{\sqrt{Var(Y_i) \cdot Var(Y_j)}} = \frac{Var(\eta)}{\sqrt{Var(Y_i) \cdot Var(Y_j)}} = \frac{Var(\eta)}{\sqrt{Var(Y_i) \cdot Var(Y_i)}} = \frac{Var(\eta)}{Var(Y_i)} = Rel(Y_i)$$

(4) Zeigen Sie, dass die Gleichung F 23.34

$$\boldsymbol{\tau_i = \lambda_{ij} \cdot \tau_j + \alpha_{ij}}$$

aus der Gleichung F 23.31

$$\boldsymbol{\tau_i = \lambda_i \cdot \eta + \alpha_i}$$

folgt.

Für zwei Variablen τ_i und τ_j folgt nach Gleichung F 23.31: $\tau_i = \lambda_i \cdot \eta + \alpha_i$ und $\tau_j = \lambda_j \cdot \eta + \alpha_j$. Löst man die zweite Gleichung nach η auf, erhält man: $\eta = (\tau_j - \alpha_j)/\lambda_j$. Setzt man diese Gleichung in Gleichung F 23.31 erhält man: $\tau_i = \lambda_i \cdot (\tau_j - \alpha_j)/\lambda_j + \alpha_i$. Durch Umformen erhält man $\tau_i = \lambda_i/\lambda_j \cdot \tau_j - (\lambda_i \cdot \alpha_j)/\lambda_j + \alpha_i$. Definiert man nun $\lambda_{ij} = \lambda_i/\lambda_j$ und $\alpha_{ij} = (\lambda_i \cdot \alpha_j)/\lambda_j + \alpha_i$, erhält man Gleichung F 23.34: $\tau_i = \lambda_{ij} \cdot \tau_j + \alpha_{ij}$.

(5) Zeigen Sie, dass aus Gleichung F 23.31 folgt:

$$Var(\tau_i) = \lambda_i^2 \cdot Var(\eta)$$

Nach den Rechenregel F 7.33 und F 7.34 für Varianzen folgt aus Gleichung F 23.31:

$$Var(\tau_i) = Var(\lambda_i \cdot \eta + \alpha_i) = Var(\lambda_i \cdot \eta) = \lambda_i^2 \cdot Var(\eta)$$

(6) Bestimmen Sie den Omega-Koeffizienten ω für das Anwendungsbeispiel zum Modell τ-kongenerischer Variablen.

Nach Gleichung F 23.46 erhält man als Schätzwert für ω:

$$\hat{\omega} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{p} \hat{\lambda}_i\right)^2}{\left(\sum_{i=1}^{p} \hat{\lambda}_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{p} \widehat{Var}(\varepsilon_i)\right)^2}$$

Für die $p = 3$ beobachteten Variablen des Anwendungsbeispiels wurden folgende Ladungsparameter festgelegt bzw. geschätzt (s. Abschnitt 23.2.6): $\hat{\lambda}_1 = 1{,}00,\ \hat{\lambda}_2 = 1{,}09,\ \hat{\lambda}_3 = 1{,}00$. Aus den berichteten Varianzen der beobachteten Variablen und der True-Score-Variablen lassen sich die Fehlervarianzen wie folgt schätzen:

$$\widehat{Var}(\varepsilon_1) = \widehat{Var}(Y_1) - \lambda_1^2 \cdot \widehat{Var}(\eta) = 0{,}47 - 1^2 \cdot 0{,}34 = 0{,}13$$
$$\widehat{Var}(\varepsilon_2) = \widehat{Var}(Y_2) - \lambda_2^2 \cdot \widehat{Var}(\eta) = 0{,}56 - 1{,}09^2 \cdot 0{,}34 = 0{,}16$$
$$\widehat{Var}(\varepsilon_3) = \widehat{Var}(Y_3) - \lambda_3^2 \cdot \widehat{Var}(\eta) = 0{,}49 - 1{,}00^2 \cdot 0{,}34 = 0{,}15$$

Setzt man die geschätzten Ladungsparameter und Fehlervarianzen in die Schätzgleichung von ω ein, erhält man:

$$\hat{\omega} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{p} \hat{\lambda}_i\right)^2}{\left(\sum_{i=1}^{p} \hat{\lambda}_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{p} \widehat{Var}(\varepsilon_i)\right)^2} = \frac{(1 + 1{,}09 + 1)^2}{(1 + 1{,}09 + 1)^2 + (0{,}13 + 0{,}16 + 0{,}15)^2} = \frac{9{,}55}{9{,}74} = 0{,}98$$