Lösungen der Übungsaufgaben aus Kapitel 24

(1) Zeigen Sie, dass das Quadrat eines standardisierten Diskriminationskoeffizienten in dem zweidimensionalen Modell in Abbildung 24.1 genau der Reliabilität entspricht.

Im Modell in Abbildung 24.1 lässt sich eine beobachtete Variable wie folgt zerlegen: $Y_i = \alpha_i + \lambda_{ij} \cdot \eta_j + \varepsilon_i$. Nach den Rechenregeln F 7.34 und F 7.35 für Varianzen und dem Sachverhalt, dass eine latente Variable η_j mit einer Fehlervariablen unkorreliert ist, ergibt sich folgende Varianzzerlegung:

$$\begin{aligned} Var(Y_i) &= Var(\alpha_i + \lambda_{ij} \cdot \eta_j + \varepsilon_i) \\ &= \lambda_{ij}^2 \cdot Var(\eta_j) + Var(\varepsilon_i) + 2 \cdot Cov(\eta_j, \varepsilon_i) \\ &= \lambda_{ij}^2 \cdot Var(\eta_j) + Var(\varepsilon_i) \end{aligned}$$

Hieraus folgt für die Reliabilität:

$$Rel(Y_i) = \frac{\lambda_{ij}^2 \cdot Var(\eta_j)}{Var(Y_i)}$$

Sind sowohl die beobachteten Variablen Y_i als auch die latenten Variablen η_j standardisiert, so sind ihre Varianzen gleich 1. Hieraus folgt, dass dann die Reliabilität dem quadrierten standardisierten Diskriminationsparameter entspricht.

(2) Zeigen Sie, dass die Reliabilität der manifesten Variablen auch bestimmt werden kann, indem man die standardisierte Fehlervarianz von dem Wert 1 abzieht.

Die Reliabilität lässt sich im Allgemeinen wie folgt anhand der Fehlervarianz bestimmen: $Rel(Y_i) = 1 - \frac{Var(\varepsilon_i)}{Var(Y_i)}$. Im Falle der Standardisierung der Variablen Y_i und η_j, ist die Varianz der beobachteten Variablen gleich 1 und die Reliabilität erhält man somit, indem man von 1 die Fehlervarianz im standardisierten Modell abzieht.

(3) Geben Sie das Modell in Abbildung 24.2 in matrixalgebraischer Form an, indem Sie die Struktur der einzelnen Vektoren und Matrizen berichten.

$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\Lambda\eta} + \boldsymbol{\varepsilon}$ **und** $\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Lambda\Phi\Lambda}' + \boldsymbol{\theta}$

mit

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \\ Y_5 \\ Y_6 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & 0 \\ \lambda_{21} & 0 \\ \lambda_{31} & 0 \\ \lambda_{41} & \lambda_{42} \\ \lambda_{51} & \lambda_{52} \\ \lambda_{61} & \lambda_{62} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} \eta_1 & 0 \\ 0 & \eta_2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} Var(\eta_1) & 0 \\ 0 & Var(\eta_2) \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} Var(\varepsilon_1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Var(\varepsilon_2) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Var(\varepsilon_3) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Var(\varepsilon_4) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Var(\varepsilon_5) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Var(\varepsilon_6) \end{bmatrix}$$

(4) Zeigen Sie unter Anwendung der Rechenregeln für Varianzen und Kovarianzen, dass die Gleichungen F 24.13 bis F 24.15 aus den Gleichungen $Y_1 = \alpha_1 + \lambda_{11} \cdot \eta_1 + \varepsilon_1$, und $Y_2 = \alpha_2 + \lambda_{21} \cdot \eta_1 + \varepsilon_2$ folgen.

Nach den Rechenregeln F 7.34 und F 7.35 für Varianzen und dem Sachverhalt, dass eine latente Variable η_j mit einer Fehlervariablen unkorreliert ist, ergeben sich folgende Varianzzerlegungen:

$$\begin{aligned} Var(Y_1) &= Var(\alpha_1 + \lambda_{11} \cdot \eta_1 + \varepsilon_1) \\ &= \lambda_{11}^2 \cdot Var(\eta_1) + Var(\varepsilon_1) + 2 \cdot \lambda_{11} \cdot Cov(\eta_1, \varepsilon_1) \\ &= \lambda_{11}^2 \cdot Var(\eta_1) + Var(\varepsilon_1) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} Var(Y_2) &= Var(\alpha_2 + \lambda_{21} \cdot \eta_1 + \varepsilon_2) \\ &= \lambda_{21}^2 \cdot Var(\eta_1) + Var(\varepsilon_2) + 2 \cdot \lambda_{21} \cdot Cov(\eta_1, \varepsilon_2) \\ &= \lambda_{21}^2 \cdot Var(\eta_1) + Var(\varepsilon_2) \end{aligned}$$

Für die Kovarianz gilt:

$$\begin{aligned} Cov(Y_1, Y_2) &= Cov(\alpha_1 + \lambda_{11} \cdot \eta_1 + \varepsilon_1, \alpha_2 + \lambda_{21} \cdot \eta_1 + \varepsilon_2) = Cov(\lambda_{11} \cdot \eta_1 + \varepsilon_1, \lambda_{21} \cdot \eta_1 + \varepsilon_2) \\ &= \lambda_{11} \cdot \lambda_{21} \cdot Cov(\eta_1, \eta_1) + \lambda_{11} \cdot Cov(\eta_1, \varepsilon_2) + \lambda_{21} \cdot Cov(\varepsilon_1, \eta_1) + Cov(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \\ &= \lambda_{11} \cdot \lambda_{21} \cdot Cov(\eta_1, \eta_1) = \lambda_{11} \cdot \lambda_{21} \cdot Var(\eta_1) \end{aligned}$$

(5) Berechnen Sie die in den Abbildungen 24.1 und 24.2 dargestellten Modelle mittels eines Computerprogramms für konfirmatorische Faktormodelle (lineare Strukturgleichungsmodelle) anhand des Datensatzes in der Datei Kapitel-24.dat, die in den Online-Materialien zu Kapitel 24 zu finden ist.

Die Lösungen entsprechen den in Kapitel 24 in den Abbildungen 24.1 und 24.2 berichteten Ergebnissen.