Lösungen zu den Übungen in Kapitel 26

(1) Zeigen Sie, dass sich die Variable Y_4 im autoregressiven Modell erster Ordnung in Abbildung 26.4 wie folgt als Funktion der Variable Y_1 ausdrücken lässt:

$$\boldsymbol{Y_4 = (\beta_{40} + \beta_{43} \cdot \beta_{30} + \beta_{43} \cdot \beta_{32} \cdot \beta_{20}) + \beta_{43} \cdot \beta_{32} \cdot \beta_{21} \cdot Y_1 + (\beta_{43} \cdot \beta_{32} \cdot \varepsilon_2 + \beta_{43} \cdot \varepsilon_3 + \varepsilon_4)}$$

Das autoregressive Modell erster Ordnung in Abbildung 26.4 lässt sich wie folgt in Gleichungen darstellen:

$$Y_4 = \beta_{40} + \beta_{43} \cdot Y_3 + \varepsilon_4 \qquad (1)$$

$$Y_3 = \beta_{30} + \beta_{32} \cdot Y_2 + \varepsilon_3 \qquad (2)$$

$$Y_2 = \beta_{20} + \beta_{21} \cdot Y_1 + \varepsilon_2 \qquad (3)$$

Setzt man Gleichung (3) in Gleichung (2) ein, erhält man:

$$\begin{aligned} Y_3 &= \beta_{30} + \beta_{32} \cdot (\beta_{20} + \beta_{21} \cdot Y_1 + \varepsilon_2) + \varepsilon_3 \\ &= \beta_{30} + \beta_{32} \cdot \beta_{20} + \beta_{32} \cdot \beta_{21} \cdot Y_1 + \beta_{32} \cdot \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \qquad (4) \end{aligned}$$

Setzt man Gleichung (4) in Gleichung (1) ein, ergibt sich :

$$\begin{aligned} Y_4 &= \beta_{40} + \beta_{43} \cdot (\beta_{30} + \beta_{32} \cdot \beta_{20} + \beta_{32} \cdot \beta_{21} \cdot Y_1 + \beta_{32} \cdot \varepsilon_2 + \varepsilon_3) + \varepsilon_4 \\ &= \beta_{40} + \beta_{43} \cdot \beta_{30} + \beta_{43} \cdot \beta_{32} \cdot \beta_{20} + \beta_{43} \cdot \beta_{32} \cdot \beta_{21} \cdot Y_1 + \beta_{43} \cdot \beta_{32} \cdot \varepsilon_3 + \beta_{43} \cdot \varepsilon_3 + \varepsilon_4 \\ &= (\beta_{40} + \beta_{43} \cdot \beta_{30} + \beta_{43} \cdot \beta_{32} \cdot \beta_{20}) + \beta_{43} \cdot \beta_{32} \cdot \beta_{21} \cdot Y_1 + (\beta_{43} \cdot \beta_{32} \cdot \varepsilon_2 + \beta_{43} \cdot \varepsilon_3 + \varepsilon_4) \end{aligned}$$

(2) Leiten Sie die indirekten Effekte von Y_2 auf Y_4 im autoregressiven Modell erster Ordnung in Abbildung 26.4 her.

Setzt man die Gleichung $Y_3 = \beta_{30} + \beta_{32} \cdot Y_2 + \varepsilon_3$ in die Gleichung $Y_4 = \beta_{40} + \beta_{43} \cdot Y_3 + \varepsilon_4$ ein, erhält man :

$$Y_4 = \beta_{40} + \beta_{43} \cdot (\beta_{30} + \beta_{32} \cdot Y_2 + \varepsilon_3) + \varepsilon_4 = \beta_{40} + \beta_{43} \cdot \beta_{30} + \beta_{43} \cdot \beta_{32} \cdot Y_2 + \beta_{43} \cdot \varepsilon_3 + \varepsilon_4$$

Es gibt somit nur einen indirekten Effekt von Y_2 auf Y_4. Dieser lautet: $\beta_{43} \cdot \beta_{32}$.

(3) Leiten Sie die indirekten Effekte von Y_1 auf Y_4 im autoregressiven Modell zweiter Ordnung in Abbildung 26.4 her.

Das autoregressive Modell zweiter Ordnung in Abbildung 26.4 lässt sich wie folgt in Gleichungen darstellen:

$$Y_4 = \beta_{40} + \beta_{43} \cdot Y_3 + \beta_{42} \cdot Y_2 + \varepsilon_4 \qquad (1)$$

$$Y_3 = \beta_{30} + \beta_{32} \cdot Y_2 + \beta_{31} \cdot Y_1 + \varepsilon_3 \qquad (2)$$

$$Y_2 = \beta_{20} + \beta_{21} \cdot Y_1 + \varepsilon_2 \qquad (3)$$

Setzt man die Formel (3) in die Formel (2) ein, erhält man:

$$\begin{aligned} Y_3 &= \beta_{30} + \beta_{32} \cdot (\beta_{20} + \beta_{21} \cdot Y_1 + \varepsilon_2) + \beta_{31} \cdot Y_1 + \varepsilon_3 \\ &= \beta_{30} + \beta_{32} \cdot \beta_{20} + \beta_{32} \cdot \beta_{21} \cdot Y_1 + \beta_{32} \cdot \varepsilon_2 + \beta_{31} \cdot Y_1 + \varepsilon_3 \end{aligned}$$

Setzt man diese Gleichung in Gleichung (1) ein, ergibt sich:

$$\begin{aligned} Y_4 &= \beta_{40} + \beta_{43} \cdot (\beta_{30} + \beta_{32} \cdot \beta_{20} + \beta_{32} \cdot \beta_{21} \cdot Y_1 + \beta_{32} \cdot \varepsilon_2 + \beta_{31} \cdot Y_1 + \varepsilon_3 + \beta_{42} \cdot Y_2 + \varepsilon_4 \\ &= \beta_{40} + \beta_{43} \cdot \beta_{30} + \beta_{43} \cdot \beta_{32} \cdot \beta_{20} + \beta_{43} \cdot \beta_{32} \cdot \beta_{21} \cdot Y_1 + \beta_{43} \cdot \beta_{32} \cdot \varepsilon_2 + \beta_{43} \cdot \beta_{31} \cdot Y_1 + \beta_{43} \cdot \varepsilon_3 + \beta_{42} \cdot Y_2 + \varepsilon_4 \end{aligned}$$

An dieser Gleichung lässt sich erkennen, dass es zwei spezifische indirekte Effekte von Y_1 auf Y_4 gibt: $\beta_{43} \cdot \beta_{32} \cdot \beta_{21}$ und $\beta_{43} \cdot \beta_{31}$. Der total indirekte Effekt ist daher $\beta_{43} \cdot \beta_{32} \cdot \beta_{21} + \beta_{43} \cdot \beta_{31}$.

(4) Zeigen Sie, dass im autoregressiven Modell erster Ordnung gilt:

$$\boldsymbol{Cov(Y_1, Y_4) = (\beta_{43} \cdot \beta_{32} \cdot \beta_{21}) \cdot Var(Y_1)}$$

$$\boldsymbol{E(Y_4) = (\beta_{40} + \beta_{43} \cdot \beta_{30} + \beta_{43} \cdot \beta_{32} \cdot \beta_{20}) + \beta_{43} \cdot \beta_{32} \cdot \beta_{21} \cdot E(Y_1)}$$

In Übung (2) haben wir hergeleitet, dass sich Y_4 wie folgt zerlegen lässt:

$$Y_4 = \beta_{40} + \beta_{43} \cdot (\beta_{30} + \beta_{32} \cdot Y_2 + \varepsilon_3) + \varepsilon_4 = \beta_{40} + \beta_{43} \cdot \alpha_3 + \beta_{43} \cdot \beta_{32} \cdot Y_2 + \beta_{43} \cdot \varepsilon_3 + \varepsilon_4 \qquad (1)$$

Hieraus folgt

$$Cov(Y_4, Y_1) = Cov[(\beta_{40} + \beta_{43} \cdot \beta_{30} + \beta_{43} \cdot \beta_{32} \cdot \beta_{20}) + \beta_{43} \cdot \beta_{32} \cdot \beta_2 \cdot Y_1 + (\beta_{43} \cdot \beta_{32} \cdot \varepsilon_2 + \beta_{43} \cdot \varepsilon_3 + \varepsilon_4), Y_1]$$

Da Konstanten mit Variablen unkorreliert sind (s. Kap. 16.4.1), gilt:

$$Cov(Y_4, Y_1) = Cov[\beta_{43} \cdot \beta_{32} \cdot \beta_{21} \cdot Y_1 + (\beta_{43} \cdot \beta_{32} \cdot \varepsilon_2 + \beta_{43} \cdot \varepsilon_3 + \varepsilon_4), Y_1]$$

Da Residuen mit Prädiktoren unkorreliert sind (Kap. 17.3), folgt:

$$Cov(Y_4, Y_1) = Cov[\beta_{43} \cdot \beta_{32} \cdot \beta_{21} \cdot Y_1, Y_1]$$

Hieraus folgt nach den Rechenregeln für Kovarianzen (s. Kap. 16.4.1):

$$Cov(Y_4, Y_1) = \beta_{43} \cdot \beta_{32} \cdot \beta_{21} \cdot Cov(Y_1, Y_1) = \beta_{43} \cdot \beta_{32} \cdot \beta_{21} \cdot Var(Y_1)$$

Da der Erwartungswert der Residualvariablen gleich 0 ist (Kap. 17.3) folgt aus Gleichung (1):

$$\begin{aligned} E(Y_4) &= E[(\beta_{40} + \beta_{43} \cdot \beta_{30} + \beta_{43} \cdot \beta_{32} \cdot \beta_{20}) + \beta_{43} \cdot \beta_{32} \cdot \beta_{21} \cdot Y_1 + (\beta_{43} \cdot \beta_{32} \cdot \varepsilon_2 + \beta_{43} \cdot \varepsilon_3 + \varepsilon_4)] \\ &= E[(\beta_{40} + \beta_{43} \cdot \beta_{30} + \beta_{43} \cdot \beta_{32} \cdot \beta_{20}) + \beta_{43} \cdot \beta_{32} \cdot \beta_{21} \cdot Y_1] \end{aligned}$$

Nach den Rechenregeln für Erwartungswerte (Kap. 7.2) folgt hieraus:

$$\begin{aligned} & E[(\beta_{40} + \beta_{43} \cdot \beta_{30} + \beta_{43} \cdot \beta_{32} \cdot \beta_{20}) + \beta_{43} \cdot \beta_{32} \cdot \beta_{21} \cdot Y_1] \\ &= E(\beta_{40} + \beta_{43} \cdot \beta_{30} + \beta_{43} \cdot \beta_{32} \cdot \beta_{20}) + (\beta_{43} \cdot \beta_{32} \cdot \beta_{21} \cdot Y_1) \\ &= (\beta_{40} + \beta_{43} \cdot \beta_{30} + \beta_{43} \cdot \beta_{32} \cdot \beta_{20}) + \beta_{43} \cdot \beta_{32} \cdot \beta_{21} \cdot E(Y_1) \end{aligned}$$

(5) Erstellen Sie die Gleichungen des Messmodells und des Strukturmodells für das Latent-State-Trait-Modell in Abbildung 26.12.

(A) Messmodell

$$Y_1 = \alpha_1 + \lambda_{11} \cdot \eta_1 + \lambda_{15} \cdot \eta_5 + \varepsilon_1$$

$$Y_2 = \alpha_2 + \lambda_{21} \cdot \eta_1 + \lambda_{25} \cdot \eta_5 + \varepsilon_2$$

$$Y_3 = \alpha_3 + \lambda_{32} \cdot \eta_2 + \lambda_{35} \cdot \eta_5 + \varepsilon_3$$

$$Y_4 = \alpha_4 + \lambda_{42} \cdot \eta_2 + \lambda_{45} \cdot \eta_5 + \varepsilon_4$$

$$Y_5 = \alpha_5 + \lambda_{53} \cdot \eta_3 + \lambda_{55} \cdot \eta_5 + \varepsilon_5$$

$$Y_6 = \alpha_6 + \lambda_{63} \cdot \eta_3 + \lambda_{65} \cdot \eta_5 + \varepsilon_6$$

$$Y_7 = \alpha_7 + \lambda_{74} \cdot \eta_4 + \lambda_{75} \cdot \eta_5 + \varepsilon_7$$

$$Y_8 = \alpha_8 + \lambda_{84} \cdot \eta_4 + \lambda_{85} \cdot \eta_5 + \varepsilon_8$$

(B) Strukturmodell

$$\eta_4 = \kappa_4 + \beta_{43} \cdot \eta_3 + \zeta_4$$

$$\eta_3 = \kappa_3 + \beta_{32} \cdot \eta_2 + \zeta_3$$

$$\eta_2 = \kappa_2 + \beta_{21} \cdot \eta_1 + \zeta_2$$

Da die Variablen η_1 bis η_4 Residualvariablen darstellen, ist ihr Erwartungswert gleich 0 (Steyer, Schmitt & Eid, 1999). Dies gilt in gleicher Weise für die Residualvariablen ζ_2 bis ζ_4. Hieraus folgt:

$$\kappa_2 = \kappa_3 = \kappa_4 = 0.$$