

## Antworten zu Kapitel 13: Unterschiede zwischen mehreren unabhängigen Stichproben: Varianzanalyse und verwandte Verfahren

### (1) Was besagt das Populationsmodell der einfaktoriellen Varianzanalyse?

Das Populationsmodell der einfaktoriellen Varianzanalyse lässt sich auf zwei Arten betrachten: Bei dem Modell in Erwartungswertdarstellung wird ein Messwert in der Population in den Erwartungswert (Bedingungspopulationsmittelwert)  $\mu_j$  und den Residualwert  $\varepsilon_{mj}$  zerlegt:  $x_{mj} = \mu_j + \varepsilon_{mj}$ . Das Modell in Effektdarstellung besagt, dass ein Messwert durch den unbedingten Populationsmittelwert ( $\mu$ ), den Populationseffekt derjenigen Bedingung, aus der der Wert gezogen wurde ( $\tau_j$ ), und alle unsystematischen Einflüsse inklusive des Messfehlers ( $\varepsilon_{mj}$ ) beeinflusst wird:  $x_{mj} = \mu + \tau_j + \varepsilon_{mj}$ .

### (2) Wie sind die Bedingungseffekte $\tau_j$ bei der einfaktoriellen Varianzanalyse definiert, und was bedeuten sie inhaltlich?

Der Parameter  $\tau_j$  kennzeichnet den Populationseffekt einer Bedingung  $a_j$ . Er gibt die Abweichung eines bedingten Populationsmittelwerts ( $\mu_j$ ) vom Gesamtmittelwert ( $\mu$ ) an.

### (3) Wie lauten die Voraussetzungen für die Anwendung des F-Tests bei der einfaktoriellen Varianzanalyse?

Die Voraussetzungen für die Anwendung des F-Tests bei der einfaktoriellen Varianzanalyse sind (1) Unabhängigkeit der Residuen, (2) Homoskedastizität (auch: Varianzhomogenität) und (3) Normalverteilung der abhängigen Variablen (was notwendigerweise stetige Variablen voraussetzt).

### (4) Formulieren Sie die Nullhypothese einer einfaktoriellen Varianzanalyse mit $J = 4$ Gruppen auf drei verschiedene Arten.

a)  $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$

b)  $H_0: \tau_j = 0$  für alle  $j$

c)  $H_0: \sigma_\tau^2 = \sum_{j=1}^J \tau_j^2 \cdot \frac{n_j}{n} = 0$

### (5) Wieso ist der Erwartungswert der $MQS_{zw}$ bei Gültigkeit der Nullhypothese mit der Populations-residualvarianz identisch?

Weil im Falle der Gültigkeit der Nullhypothese eine Variation der Bedingungsmittelwerte nur mit dem Stichprobenfehler zu erklären wäre, und der Stichprobenfehler, der zur Variation der Bedingungsmittelwerte führt, der gleiche ist, der auch zur Variation der Messwerte innerhalb einer Bedingung führt.

### (6) In welcher Beziehung steht der F-Wert der einfaktoriellen Varianzanalyse mit zwei Stufen zum t-Wert?

Bei  $p = 2$  Stufen entspricht  $F = t^2$ .

### (7) Was ist der Unterschied zwischen festen und zufälligen Effekten?

Feste Effekte bedeutet, dass das variierte Merkmal nur eine bestimmte Anzahl möglicher Ausprägungen hat und dass die realisierten Faktorstufen genau diesen Ausprägungen entsprechen. Hat der Faktor hingegen unendlich viele mögliche Ausprägungen und stellen die realisierten Faktorstufen nur eine Zufallsauswahl dieser Ausprägungen dar, spricht man von einem Faktor mit zufälligen Effekten.

**(8) Welche Effektstärkenmaße gibt es für die Varianzanalyse, und welche Wertebereiche haben diese Maße jeweils?**

Effektstärkenmaß  $\eta^2$  und Effektstärkenschatzer  $\hat{\eta}^2$  (oder  $\hat{\omega}^2$ ): Wertebereich 0 bis 1

Effektstärkenmaß  $\phi^2$  und Effektstärkenschatzer  $f^2$ : Wertebereich 0 bis  $+\infty$

Effektstärkenmaß  $\phi$  und Effektstärkenschatzer  $f$ : Wertebereich 0 bis  $+\infty$

**(9) Was versteht man unter dem Begriff » $\alpha$ -Fehler-Kumulierung«?**

Führt man im Anschluss an den globalen  $F$ -Test bei der Varianzanalyse Einzelvergleiche durch, um herauszufinden, welche Mittelwertspaare signifikant voneinander abweichen, so nimmt das Risiko, für mindestens einen dieser Paarvergleiche die Nullhypothese fälschlicherweise abzulehnen, mit der Anzahl der Paarvergleiche überproportional zu.

**(10) Wie funktioniert die Bonferroni-Holm-Adjustierung, und welchen Vorteil hat sie gegenüber der Bonferroni-Adjustierung?**

- (1) Festlegung von  $\alpha_{\text{fam}}$
- (2) Durchführung der  $s$  Paarvergleiche und Ermittlung der jeweiligen  $p_r$ -Werte. Ein  $p_r$ -Wert ist der  $p$ -Wert des  $r$ -ten Paarvergleichs.
- (3) Sortieren der Paarvergleiche nach den  $p_r$ -Werten in aufsteigender Reihenfolge, so dass  $P_1$  der Mittelwertsunterschied mit dem »signifikantesten« Effekt,  $P_2$  der Mittelwertsunterschied mit dem »zweitsignifikantesten« Effekt etc. und  $P_s$  der Mittelwertsunterschied mit dem am wenigsten signifikanten Effekt ist.
- (4) Bestimmung des adjustierten spezifischen Signifikanzniveaus auf der Basis der Gleichung

$$\alpha_r = \frac{\alpha_{\text{fam}}}{s - (r - 1)}$$

Vorteil: Die Bonferroni-Holm-Methode ist weniger konservativ als die Bonferroni-Methode, d. h. die Nullhypothese kann in Bezug auf einzelne Paarvergleiche häufiger abgelehnt werden.

**(11) Was sind polynomiale Kontraste?**

Polynomiale Kontraste bezeichnen ein Set von Kontrasten, bei denen – gegeben  $J$  Stufen eines Faktors – insgesamt  $J - 1$  Kontrasthypthesen getestet werden. Im Falle von  $J = 4$  Stufen und dementsprechend  $J - 1 = 3$  Kontrasten testet Hypothese 1 ein Polynom erster Ordnung (den linearen Trend), Hypothese 2 ein Polynom zweiter Ordnung (den quadratischen Trend) und Hypothese 3 ein Polynom dritter Ordnung (den kubischen Trend).

**(12) Wie lautet das Populationsmodell der zweifaktoriellen Varianzanalyse?**

$$x_{mjk} = \mu + \tau_{a_j} + \tau_{b_k} + \tau_{(a \times b)_{jk}} + \varepsilon_{mjk}$$

**(13) Was versteht man unter einem Haupteffekt?**

Bei der zweifaktoriellen Varianzanalyse stehen die Haupteffektparameter  $\tau_{a_j}$  und  $\tau_{b_k}$  für die Abweichung eines Bedingungsmittelwertes in der Population vom Gesamtmittelwert.

**(14) Was versteht man unter der Interaktion zweier Faktoren?**

Bei der zweifaktoriellen Varianzanalyse steht der Interaktionseffektparameter  $\tau_{(a \times b)_{jk}}$  für die Abweichung eines Zellmittelwertes vom Gesamtmittelwert, nachdem die Haupteffekte der Faktoren  $A$  und  $B$  subtrahiert wurden.

**(15) Wie wird ein Interaktionseffekt definiert?**

Eine Interaktion zwischen zwei Faktoren  $A$  und  $B$  liegt dann vor, wenn sich die bedingten Haupteffekte eines Faktors zwischen den Stufen des jeweils anderen Faktors unterscheiden.

**(16) Wie kann die Hypothese, dass es bei einer  $2 \times 2$ -faktoriellen Varianzanalyse additive Haupteffekte beider Faktoren, aber keine Interaktion gibt, in ein Set von Kontrastthesen übersetzt werden?**

Im einfachsten Fall eines  $2 \times 2$ -Designs würde das Set von Kontrastthesen aus drei Kontrasten bestehen, wobei der erste Kontrast sich auf die Haupteffekte des Faktors  $A$ , der zweite sich auf die Haupteffekte des Faktors  $B$  und der dritte sich auf die Interaktionseffekte  $A \times B$  beziehen würde. In Kontrastkoeffizienten übersetzt ergäbe sich:

- Kontrast 1:  $K_{11} = 1, K_{12} = 1, K_{21} = -1, K_{22} = -1$ . Dieser Kontrast würde die folgende Nullhypothese testen:  $H_0: \mu_{11} + \mu_{12} - \mu_{21} - \mu_{22} = 0$ .
- Kontrast 2:  $K_{11} = 1, K_{12} = -1, K_{21} = 1, K_{22} = -1$ . Dieser Kontrast würde die folgende Nullhypothese testen:  $H_0: \mu_{11} - \mu_{12} + \mu_{21} - \mu_{22} = 0$ .
- Kontrast 3:  $K_{11} = 1, K_{12} = -1, K_{21} = -1, K_{22} = 1$ . Dieser Kontrast würde die folgende Nullhypothese testen:  $H_0: \mu_{11} - \mu_{12} - \mu_{21} + \mu_{22} = 0$ .

Wenn die Hypothese stimmt, dass es zwar Haupteffekte auf den Faktoren  $A$  und  $B$ , aber keine Interaktionseffekte gibt, dann müssten die ersten beiden Kontraste signifikant sein, der dritte hingegen nicht.

**(17) Was versteht man unter einfachen Haupteffekten, und wie werden sie überprüft?**

Mit einfachen (oder »bedingten«) Haupteffekten sind die Haupteffekte einer Faktorstufe innerhalb einer Stufe des jeweils anderen Faktors gemeint. Sie lassen sich bspw. mit Hilfe von post-hoc-Einzelvergleichen überprüfen.

**(18) Was ist der Unterschied zwischen einem partiellen und einem nicht-partiellen Effektstärkenmaß? Wann wendet man welches Maß an?**

Beim nicht-partiellen Effektstärkenschätzer  $\hat{\eta}_{\text{Effekt}}^2$  wird Quadratsumme eines Faktors bzw. der Interaktion durch die Gesamtquadratsumme geteilt; beim partiellen Effektstärkenschätzer  $\hat{\eta}_{p\text{-Effekt}}^2$  wird die Quadratsumme eines Effekts nur durch die Quadratsumme des Effekts und der Quadratsumme innerhalb der Bedingungen geteilt. Der Vorteil des partiellen Effektstärkenmaßes besteht darin, dass die Größe eines bestimmten Effekts nun unabhängig davon ist, aus welchen anderen Faktoren das jeweilige varianzanalytische Design besteht.  $\hat{\eta}_p^2$  ist also über unterschiedliche Studien hinweg besser vergleichbar. Will man die Größe eines bestimmten Effekts zwischen verschiedenen Studien vergleichen, bietet es sich an,  $\hat{\eta}_p^2$  zu inspizieren. Der Nachteil ist, dass sich die partiellen Effektstärkemaße innerhalb einer Studie nicht mehr zu einem Gesamteffekt, d. h. dem Anteil der insgesamt aufgeklärten Varianz an der Gesamtvarianz, aufaddieren. Will man also die Größe unterschiedlicher Effekte innerhalb der gleichen Studie miteinander vergleichen, bietet es sich an, das nicht-partielle Effektstärkenmaß  $\hat{\eta}^2$  zu inspizieren.

**(19) Wie lauten die Voraussetzungen für die Anwendung des  $H$ -Tests nach Kruskal und Wallis?**

Der  $H$ -Test setzt voraus, dass das Merkmal  $X$  in der Population stetig ist. Die Verteilung innerhalb der Bedingungen darf dabei von der Normalverteilung abweichen. Ferner wird vorausgesetzt, dass die Stichproben voneinander unabhängig sind, dass die Messwerte innerhalb einer Gruppe voneinander unabhängig sind und dass die Verteilungen des Merkmals sich zwischen den Subpopulationen nicht unterscheiden. Das beinhaltet auch, dass die Varianzen in den Subpopulationen homogen sein müssen.

**(20) Unter welchen Bedingungen sollte man den Kruskal-Wallis-Test der einfaktoriellen Varianzanalyse vorziehen?**

Der Kruskal-Wallis-Test sollte der einfaktoriellen Varianzanalyse dann vorgezogen werden, wenn (a) es sich zwar um eine stetige Variable handelt, die Normalverteilungsannahme aber verletzt ist oder wenn (b) die Varianzhomogenitätsannahme aufgrund von einzelnen Ausreißern bzw. Extremwerten im Falle kleiner Stichproben verletzt ist.

**(21) Wie testet man Unterschiede zwischen mehreren Gruppen auf Signifikanz, wenn (a) nominalskalierte und (b) ordinalskalierte kategoriale abhängige Variablen vorliegen?**

Liegt eine nominalskalierte abhängige Variable vor, ist das Pendant zur Varianzanalyse das Logit-Modell. Bei ordinalskalierten kategorialen abhängigen Variablen kann man auf die logistische Regressionsanalyse zurückgreifen.